Die Geometrie der Wirklichkeit

Vom ersten Tick zu den Elementarteilchen

Thomas Krause

2026

Thomas Krause

Die Geometrie der Wirklichkeit. Vom ersten Tick zu den Elementarteilchen.

Erste Auflage, 2026.

Satz und Abbildungen mit Unterstützung von
Perplexity Computer.

Gesetzt in Latin Modern.

Format 6×9 Zoll.

Für alle, die abends den Himmel ansehen
und sich fragen,
warum die Welt sich nicht durcheinanderbringt.

Und für die Geduld jener, die zugehört haben,
als die Sätze noch nicht fertig waren.

Inhaltsverzeichnis

Prolog: Eine Welt aus Tick und Zahnrad **xiv**

I Der erste Tick **1**

1 Das Problem der Physik heute **2**

1.1 Eine Zahl, die keine Ruhe lässt 3

1.2 Das Standardmodell: ein Triumph mit leerem Sockel . 5

1.3 Die Spreizung der Fermionmassen 6

1.4 Wohin die üblichen Antworten führen 8

1.5 Drei Annahmen als Ausgangspunkt 9

2 Wovon wir ausgehen: ein Punkt, ein Takt **11**

2.1 Was ein Punkt bedeutet 12

2.2 Was ein Takt bedeutet 13

2.3 Was eine Regel bedeutet 14

2.4 Diskretion und Physik 15
2.5 Zustand und Übergang 15

3 Wie aus einem Takt eine Linie wird 18
3.1 Die erste Verdopplung 18
3.2 Was eine Linie von zwei Punkten unterscheidet 19
3.3 Zähnezahl und Periode 20
3.4 Dimension durch Iteration 21
3.5 Die erste Generation der Geometrie 22

4 Das Dreieck und das Fünfeck 24
4.1 Drei Punkte auf einem Kreis 24
4.2 Das Viereck und seine Grenzen 25
4.3 Galois und das Ende der Lösbarkeit 26
4.4 Der goldene Schnitt 27
4.5 Die Diagonale und das Verhältnis 28
4.6 Warum nicht das Siebeneck, das Neuneck? 29

5 Pentagramm und Ikosaeder 31
5.1 Von der Ebene in den Raum 32
5.2 Die Symmetriegruppe A_5 32
5.3 Einfach, nichtabelsch, minimal 33
5.4 Felix Klein und das Ikosaeder-Buch 34
5.5 Warum ausgerechnet diese Gruppe für das Universum? 35
5.6 Drei Generationen aus sechzig Elementen 36
5.7 Die Klasse-A-Primzahlen 37
5.8 Der Ikosaeder als Vorbereitung des Hauptteils 38

II Das Getriebe der Welt 40

6 Was eine Schwingung wirklich ist 41

6.1 Die Frequenz: wie oft pro Tick 42

6.2 Schwingung im Takt der Zeit 43

6.3 Das Licht als Muster von Schwingungen 44

6.4 Wenn die ganze Welt aus Schwingungen besteht 46

7 Drei Zahnräder mit unterschiedlichen Zähnezahlen 48

7.1 Warum gerade diese Zähnezahlen? 49

7.2 Das Verhältnis der Frequenzen 51

7.3 Die Zähnezahlen und die Darstellungstheorie 53

7.4 Was das Getriebe antreibt 55

8 Warum sich alles erst nach 20 Schritten wiederholt 56

8.1 Zwanzig Ticks — die Periode des Getriebes 57

8.2 Zwanzig und die Symmetrie des Ikosaeders 57

8.3 Das pythagoräische Komma und die Unlösbarkeit des Zwölf-Ton-Zirkels 59

8.4 Die zeitliche Architektur der Welt 61

9 Sommerfelds Rätsel: die magische 137 62

9.1 Was die Feinstrukturkonstante beschreibt 63

9.2 Klasse-A-Primzahlen und die Struktur von 137 64

9.3 Die Fermat-Zerlegung von 137 65

9.4 Die Konstante K1 und die geometrische Stufe 66

10 Der goldene Schnitt als Treppe 68

10.1 Logarithmen als Stufen 69

10.2 Die Higgs-Skala als Erdgeschoss 70
10.3 Rationale Stufen und die Massen der Elementarteilchen 72
10.4 Die goldene Treppe als Vorgriff auf Teil 4 73

11 Wie Sommerfeld, Pauli, Eddington an 137 verzweifelten 75

11.1 Sommerfeld in München: eine Schule und ihr Rätsel . 76
11.2 Pauli und die Zimmer-Nummer Hundertdreiunddreißig 77
11.3 Eddingtons kühner Irrtum 78
11.4 Heisenbergs Irritation und der Briefwechsel mit Pauli . 79
11.5 Bohr und das staunende Schweigen 80
11.6 Der Stand heute und der Ausblick 81
11.7 Die Konstante und die Konstanten-Sucher 83
11.8 Warum die Frage immer noch offen ist 83

III Warum es Materie geben muss 85

12 Eine Uhr, die nicht aufgeht 86

12.1 Das pythagoreische Komma der Physik 87
12.2 Die Uhr, die nicht aufgeht 88
12.3 Materie als Bilanzunterschied 89
12.4 Zwanzig Ticks und 360 Möglichkeiten 90
12.5 Warum Materie persistiert 92

13 Die fünf Schubladen des Ikosaeders 93

13.1 Was eine irreduzible Darstellung ist 94
13.2 Die Quadratsumme und ihre Bedeutung 94
13.3 Die erste Schublade: der Skalar 95

13.4 Die zweite und dritte Schublade: die Drei-Generationen 96
13.5 Die vierte Schublade: vier Dimensionen, vier Kräfte . . 97
13.6 Die fünfte Schublade: fünf Blöcke und die starke Kraft 98
13.7 Warum nicht sechs Schubladen? 99

14 Drei Generationen, weil drei Schubladen offen sind 101
14.1 Die dreidimensionale Schublade 102
14.2 Die Massenhierarchie als Signal 102
14.3 Warum keine vierte Generation? 103
14.4 Die zwei Dreier-Schubladen sind belegt 105
14.5 Das Standardmodell-Rätsel in neuem Licht 105
14.6 Quarks und die Dreier-Schubladen 106

15 Materie und Antimaterie als Spiegelbild 108
15.1 Die Galois-Spiegelung 109
15.2 Was Evariste Galois sah 110
15.3 CP-Symmetrie und ihre Verletzung 111
15.4 Die Asymmetrie des Universums 112
15.5 Falsifikation und Ausblick 113

16 Klasse-A-Primzahlen — 11, 19, 59 115
16.1 Woher die drei Zahlen stammen 116
16.2 Warum Primzahlen seltsam sind 116
16.3 Kongruenz und die Welt modulo 5 117
16.4 Die Zahl 11 und ihre Stellung 118
16.5 Die Zahl 19 und der Flächen-Stabilisator 119
16.6 Die Zahl 59 und die volle Gruppe 120
16.7 Warum tauchen genau diese drei auf? 120

16.8 Primzahlen als Siegel der Unzerlegbarkeit 122
16.9 Falsifikation F11 123
16.10 Zwei Schwestern, die sich nie begegnen 124
16.11 Ein Blick zurück auf Teil 3 125

IV Die Massenleiter 127

17 Wie der goldene Schnitt eine Tonleiter baut 129
17.1 Logarithmische Skalen und warum sie hier natürlich sind 130
17.2 Gleichschwebende Stimmung und goldene Alternative 132
17.3 Warum gerade diese Nenner? 133
17.4 Eine Tabelle der Stufen 134
17.5 Von der Tonleiter zur Massenvorhersage 135

18 Higgs als das Fundament 137
18.1 Das Feld, das allem Masse gibt 138
18.2 Der Mexikanerhut und die Symmetriebrechung 139
18.3 Die Selbst-Anziehung des Higgs-Felds 140
18.4 Higgs auf der Massenleiter 141
18.5 Die Vorhersage: Ein Sub-Higgs bei 63,57 GeV 142

19 Die drei Inseln des Spektrums 144
19.1 Der Stufen-Atlas 145
19.2 Die erste Insel: QCD-Hauptbereich 146
19.3 Die zweite Insel: Schwerquark-Region 147
19.4 Die dritte Insel: Higgs-Insel 148
19.5 Die Skala-Drift zwischen den Inseln 149
19.6 Was die Lücken bedeuten 150

20 Top, Bottom, Tau **151**

20.1 Das schwerste bekannte Teilchen und seine Besonderheiten 152

20.2 Die Beziehung zwischen Top und Higgs 153

20.3 Das Bottom-Quark 154

20.4 Das Tau-Lepton 155

20.5 Die drei Familien und ihre Geometrie 156

21 Mischwinkel als kleine Drehungen **158**

21.1 Schubladen und ihre Achsen 159

21.2 Der Cabibbo-Winkel 160

21.3 Die Wolfenstein-Parametrisierung 161

21.4 Die PMNS-Matrix für Neutrinos 161

21.5 Der goldene Mischwinkel 162

21.6 Woher kommen die Mischwinkel? 163

21.7 Der Weinberg-Winkel als Tetraeder-Geometrie 164

21.8 CKM als Übergang zwischen Pentagon und Dreieck . . 165

22 Neutrinos **166**

22.1 Die Entdeckung der Neutrinomasse — Super-Kamiokande 1998 167

22.2 Das Neutrino-Spektrum und seine Messbarkeit 168

22.3 Die goldene Neutrinohierarchie 169

22.4 Die normale Hierarchie 170

22.5 Majorana oder Dirac? 171

22.6 Der Reaktor-Mischwinkel und die JUNO-Vorhersage . 172

22.7 Das Neutrino als Grenzstein der Massenleiter 174

V Was wir vorhersagen **176**

23 Dreizehn Identitäten in einfachen Worten **177**

24 Zwölf Türen **186**

25 Was die Theorie kippen würde **194**

VI Was Materie ist **201**

26 Der Beschleuniger zerlegt nicht **202**

27 Eine Welt aus Beziehung **208**

28 Was bleibt zu tun **217**

Epilog: Was bleibt **227**

Epilog **227**

Danksagung **231**

Danksagung **231**

Glossar **235**

Glossar **235**

Das Epsilon-Paper **249**

Anhang A: Das Epsilon-Paper **249**

Die dreizehn Identitäten auf einen Blick **265**

Anhang B: Die dreizehn Identitäten **265**

Quellen und Konstanten **267**

Anhang C: Quellen und Konstanten **267**

Prolog: Eine Welt aus Tick und Zahnrad

Die Welt ist nicht aus Bauklötzen gemacht.
Sie ist aus Beziehungen gemacht, die nach festen Regeln tanzen.

Stellen Sie sich vor, Sie stehen vor einem alten Wanduhrwerk. Das Glas ist weggenommen. Sie sehen Zahnräder, eine Unruh, eine Feder. Wenn die Uhr läuft, hört man ein leises, regelmäßiges Tick. Jedes Tick ist ein Augenblick, in dem ein Zahn weiterspringt. Die Zahnräder greifen ineinander; das große dreht sich langsam, das kleine schnell. Trotzdem läuft alles im Takt. Nichts klemmt, nichts überholt, nichts bleibt stehen.

Dieses Buch macht den Versuch, die ganze Welt der Elementarteilchen genau so zu verstehen: als ein Uhrwerk mit ganz wenigen Zahnrädern, einem einzigen Tick und ein paar geometrischen Regeln, die festlegen, wer mit wem in Eingriff gehen darf. Es ist ein Buch ohne Bauklötze und ohne Bühne. Es gibt keinen leeren Raum, in den Teilchen hineingestellt werden. Es gibt nur das Tick und die Drehung von Zahnrädern.

Der Plan ist einfach. Ich nehme nur drei Dinge an:

1. Es gibt einen *Punkt*. Etwas, von dem aus alles ausgeht.

2. Es gibt einen *Takt*. Eine kleinste Zeiteinheit, ein Tick.

3. Es gibt eine *Regel*, wie sich aus einem Tick der nächste ergibt.

Aus diesen drei Dingen, behaupte ich, lässt sich Schritt für Schritt aufbauen, was die Physik in den vergangenen hundert Jahren mühsam gemessen hat. Die drei Generationen der Materie, der Higgs, der Top-Quark, die Massen aller geladenen Leptonen und Quarks, die Mischwinkel der Neutrinos, sogar die magische Zahl 137 aus Sommerfelds Feinstrukturkonstante. Das alles fällt aus der Geometrie des ersten Tick heraus, wenn man die Geometrie nur weit genug verfolgt.

Ich will nicht behaupten, dass dieses Buch alle Fragen der Physik beantwortet. Es gibt offene Stellen, und ich werde sie kennzeichnen. Aber das, was es tut, tut es ohne Tricks. Jede Zahl, die hier auftaucht, ist entweder eine reine Konstante (wie der goldene Schnitt φ) oder folgt aus der Geometrie. Es gibt keinen versteckten Schalter, an dem man solange dreht, bis es passt. Das ist der eigentliche Test einer Theorie: nicht, ob sie viel erklären kann, sondern ob sie das, was sie erklärt, ohne freie Drehknöpfe erklärt.

Wie man dieses Buch liest. Das Buch hat sechs Teile. Teil 1 und 2 bauen das Uhrwerk auf — den Tick, die Zahnräder, die Drehung. Teil 3 und 4 zeigen, wie aus diesem Uhrwerk die Materie und ihre Massen herausfallen. Teil 5 und 6 sind die kritischen Kapitel: was die Theorie vorhersagt und was sie kippen würde.

Im Text finden Sie kleine Kästen mit der Überschrift *Lesart*. Sie enthalten den gleichen Gedanken in einer anderen Sprache: einmal aus Sicht einer Ingenieurin, einmal aus Sicht eines Musikers, eines Buchhalters, eines Informatikers, eines Biologen, einer Architektin oder eines Philosophen. Wenn eine Lesart zu Ihrem Beruf passt, lesen Sie sie. Wenn nicht, überspringen Sie sie. Sie verlieren nichts.

Die wenigen Formeln, die im Buch vorkommen, sind als Bilder eingefügt. Sie müssen sie nicht nachrechnen. Es genügt, wenn Sie sie ansehen wie einen kurzen Schaltplan und weiterlesen.

Wer es eilig hat, springt direkt zu Kapitel 7. Dort sehen Sie die drei Zahnräder, mit denen das ganze Buch spielt. Alles andere ist Vorbereitung darauf und Folge daraus.

— Thomas Krause, im Frühjahr 2026

Teil I

Der erste Tick

KAPITEL 1

Das Problem der Physik heute

Es gibt einen Moment in der Geschichte der Physik, der sich rückblickend wie ein stilles Signal liest. Der Münchner Theoretiker Arnold Sommerfeld hatte gerade seine Arbeit über die Feinstruktur des Wasserstoffspektrums abgeschlossen. Das Jahr war 1916, mitten in einem Krieg, der Europa zerstörte. Sommerfeld saß in seinem Büro an der Ludwig-Maximilians-Universität, umgeben von Rechnungen und Briefen, und trug die letzte Konsequenz aus einer langen Überlegungskette ein. Was aus seinen Gleichungen herausfiel, war eine dimensionslose Zahl: das Verhältnis der Elementarladung zum Quadrat, geteilt durch das Produkt aus Lichtgeschwindigkeit und Planckscher Wirkungsquantum. Drei Naturkonstanten, die eigentlich aus völlig verschiedenen Ecken der Physik stammten, und ihr Verhältnis war ungefähr ein hundertsiebenunddreißigstel. Sommerfeld nannte diese Kombination Feinstrukturkonstante und bezeichnete sie mit dem griechischen Buchstaben α.

Er wusste in diesem Augenblick, dass er etwas Bedeutendes gefunden hatte. Aber er wusste nicht, was. Die Zahl erklärte, warum die Spektrallinien des Wasserstoffs in Wirklichkeit feine Doppellinien sind, also eine Feinstruktur besitzen. Das war die unmittelbare Anwendung. Aber warum das Universum genau diesen Zahlenwert für α wählte, und nicht einen anderen, das stand auf einem ganz anderen Blatt. Die Physik hatte damals kein Werkzeug, diese Frage auch nur zu stellen. Sie war einfach da, gemessen, stabil, präzise, reproduzierbar, und niemand konnte sagen, warum das Universum genau diesen Wert gewählt hatte.

Diese Frage blieb offen. Sie ist es, in gewissem Sinn, bis heute.

1.1 Eine Zahl, die keine Ruhe lässt

In den Jahrzehnten nach Sommerfeld versammelte sich eine bemerkenswerte Runde von Physikern um dieses Rätsel. Wolfgang Pauli, der als junger Mann so etwas wie das Gewissen der theoretischen Physik war, entwickelte eine fast obsessive Beziehung zu der Zahl 137. Er erwähnte sie in Briefen, sprach von ihr in Seminaren, nannte sie in Zusammenhängen, in denen streng genommen kein Zahlenwert gebraucht wurde. Kollegen erinnern sich, dass er auf Cocktailparties, wenn er gefragt wurde, womit er sich beschäftige, manchmal einfach antwortete: »Einhundertsiebenunddreißig.«

Arthur Eddington, der britische Astrophysiker, der die allgemeine Relativitätstheorie durch seine Sonnenfinsternis-Expedition von 1919 berühmt gemacht hatte, verlor sich in seinen späten Jahren in zahlentheoretischen Spekulationen um 137. Er versuchte, sie aus den ganzen Zahlen herzuleiten, baute ganze Gebäude aus Kombinatorik und Gruppentheorie, nannte das Ergebnis naturphilosophisch, und erntete bei seinen professionellen Kollegen zunehmend Unverständnis. Max Born, einer der Väter der Quantenmechanik, und Werner Heisenberg schrieben einander Briefe, in denen 137 immer wieder auftauchte

wie ein wiederkehrendes Thema in einer Symphonie, von der man den Schluss nicht kennt.

Es gibt eine Anekdote über Paulis letzte Krankenhauseinlieferung. In seinen späten Lebensjahren wurde er in Zürich in ein Privatzimmer eines Krankenhauses eingewiesen. Das Pflegepersonal teilte ihm die Zimmernummer mit: Es war Zimmer 137. Pauli soll sofort und ohne Zögern gesagt haben: »Da komme ich nicht lebend raus.« Er starb wenige Wochen später, am 15. Dezember 1958, in diesem Zimmer. Ob die Geschichte vollständig verbürgt ist oder im Laufe der Jahre ausgeschmückt wurde, kann hier nicht entschieden werden. Was sie jedoch illustriert, ist real: Diese Zahl hatte eine eigenartige Macht über die klügsten Köpfe des zwanzigsten Jahrhunderts.

Was ist α genau, und warum ist sie so rätselhaft? Es ist das Verhältnis, das angibt, wie stark elektrisch geladene Teilchen miteinander und mit Photonen wechselwirken. Ein kleines α bedeutet, dass diese Wechselwirkung schwach ist, was unter anderem dafür sorgt, dass die Quantenelektrodynamik überhaupt als Störungsreihe funktioniert. Wäre α zehnmal größer, wären Atome instabil, würden Elektronen sofort in den Kern stürzen, würde Chemie nicht funktionieren. Wäre α deutlich kleiner, würde Licht kaum mit Materie wechselwirken, die Welt wäre durchsichtig und strukturlos, Sterne könnten keine schweren Elemente durch Fusionsprozesse erzeugen. Die Zahl liegt also in einem engen Korridor, der stabile Atome, Chemie und Leben erlaubt. Aber warum genau dieser Korridor? Das Standardmodell gibt keine Antwort.

Richard Feynman, meisterhafter Erzähler und Physiker des zwanzigsten Jahrhunderts, bezeichnete die Feinstrukturkonstante einmal als »eine der größten verfluchten Geheimnisse der Physik« und sagte, sie sollte jeden anständigen Theoretiker nachts wach halten. Sie hat ihn tatsächlich beschäftigt, ein Leben lang, ohne dass er eine Erklärung gefunden hätte.

Die Feinstrukturkonstante $\alpha \approx 1/137$ ist eine dimensionslose Kombination von Grundkonstanten der Natur. Warum das Universum genau diesen Wert trägt, und nicht einen anderen, erklärt das Standardmodell der Elementarteilchenphysik nicht. Sie ist das bekannteste Beispiel für eine Klasse offener Fragen, um die es in diesem Buch geht.

1.2 Das Standardmodell: ein Triumph mit leerem Sockel

Das Standardmodell der Elementarteilchenphysik ist eines der erfolgreichsten Theoriegebäude, das die Menschheit je errichtet hat. Es wurde in der zweiten Hälfte des zwanzigsten Jahrhunderts von vielen Forschern erarbeitet und vereint die Quantenmechanik mit der speziellen Relativitätstheorie zu einer konsistenten Beschreibung aller bekannten Elementarteilchen und dreier der vier Grundkräfte: der elektromagnetischen Kraft, der schwachen Kernkraft und der starken Kernkraft.

Die Präzision, die das Standardmodell erreicht, ist beispiellos. Die Vorhersage des anomalen magnetischen Moments des Elektrons, also der geringfügigen Abweichung des magnetischen Moments vom Wert, den die einfache Diractheorie liefert, stimmt mit dem Messergebnis auf mehr als zehn Nachkommastellen überein. Das ist, als würde man die Entfernung zwischen London und New York auf die Breite eines menschlichen Haares genau vorhersagen. Das Higgsboson, 1964 von Peter Higgs, François Englert und anderen theoretisch vorhergesagt, wurde 2012 am Genfer CERN-Beschleuniger LHC tatsächlich mit einer Masse von rund 125 GeV gefunden. Die Theorie funktioniert, in diesem Sinne, ausgezeichnet.

Und doch hat das Standardmodell einen leeren Sockel. Es enthält rund sechsundzwanzig freie Parameter, also Zahlen, die die Theorie

selbst nicht erklärt, sondern als Messwerte aus dem Experiment einfach hineinsteckt. Dazu gehören die Massen der sechs Quarks, die Massen der drei geladenen Leptonen, die Massen der drei Neutrinos, die drei Kopplungskonstanten der starken, schwachen und elektromagnetischen Kraft, die vier Parameter der Quark-Mischungsmatrix, die vier Parameter der Lepton-Mischungsmatrix, die Higgsmasse, der Vakuumerwartungswert des Higgsfeldes, und einige weitere. Keine dieser Zahlen folgt aus dem inneren Aufbau der Theorie. Man misst sie, trägt sie ein, und dann macht die Theorie Vorhersagen. Aber erklärt werden die Zahlen nicht.

Das ist nicht eine technische Schwäche, die man irgendwann durch mehr Rechenleistung beheben könnte. Es ist ein konzeptionelles Defizit: Das Standardmodell ist keine Theorie der Parameter, sondern eine Theorie unter Verwendung der Parameter. Die Parameter selbst bleiben ohne Erklärung.

1.3 Die Spreizung der Fermionmassen

Besonders deutlich wird das Defizit bei den Fermionmassen, also den Massen der Quarks und Leptonen. Das schwerste bekannte Fermion ist das Topquark mit rund 173 Gigaelektronenvolt (GeV). Das leichteste geladene Fermion ist das Elektron mit ungefähr einem halben Megaelektronenvolt (MeV). Dazwischen liegen fast zwölf Größenordnungen, ein Faktor von mehreren hunderttausend Milliarden.

Um sich das vorzustellen: Wenn das Elektron ein Staubkorn von einem Millimeter Durchmesser wäre, dann wäre das Topquark ein Felsbrocken von dreihundert Kilometern Durchmesser. Die Natur hat also eine Teilchenart, die nach denselben Gesetzen wie alle anderen agiert, aber um den Faktor dreihundert Billionen schwerer ist als eine andere.

Warum das Universum eine solche Bandbreite benötigt, sagt das Standardmodell nicht. Die Zahlen sind so, wie sie gemessen werden,

und das ist die einzige Antwort, die das Standardmodell anbieten kann.

Dasselbe gilt für das Generationenproblem. Die Materie, aus der Tische, Planeten und Lebewesen bestehen, wird von der ersten Generation von Fermionen getragen: dem up-Quark, dem down-Quark, dem Elektron und dem Elektron-Neutrino. Das wäre vollkommen ausreichend für eine funktionierende Physik. Warum existieren dann noch zwei weitere Generationen, die in jeder Hinsicht exakte Kopien der ersten sind, außer dass ihre Mitglieder sehr viel schwerer sind? Das Myon ist dasselbe wie das Elektron, nur etwa zweihundertmal schwerer. Das Tauon ist dieselbe Kopie des Elektrons, nur etwa dreitausendfünfhundertmal schwerer. Das Charm-Quark ist eine schwerere Kopie des up-Quarks, das strange-Quark eine des down-Quarks, und so weiter für die dritte Generation. Das Standardmodell registriert diese drei Generationen ohne sie zu erklären. Es gibt ihnen Namen, ordnet ihnen Quantenzahlen zu, beschreibt ihre Wechselwirkungen, aber es hat nichts zu sagen über die Frage: Warum drei?

Lesart Informatikerin

In der Informatik gibt es das Konzept der minimalen Beschreibung, formalisiert durch die Kolmogorov-Komplexität: Ein Datensatz ist dann gut verstanden, wenn man ihn durch ein Programm beschreiben kann, das kürzer ist als der Datensatz selbst. Das Standardmodell mit sechsundzwanzig freien Parametern hat eine hohe Beschreibungslänge. Man muss sechsundzwanzig Zahlen eingeben, bevor das Programm überhaupt anfangen kann zu rechnen. Die Frage, die dieses Buch stellt, lautet: Gibt es ein kürzeres Programm, das dieselbe Ausgabe erzeugt? Ein Programm mit vielleicht drei Eingaben statt sechsundzwanzig?

1.4 Wohin die üblichen Antworten führen

Die gängigen Forschungsansätze, die auf diese offenen Fragen reagieren, folgen einem gemeinsamen Schema: mehr Symmetrie, mehr Teilchen, mehr Dimensionen. Supersymmetrie verdoppelt die Zahl der Elementarteilchen durch die Einführung eines supersymmetrischen Partners für jedes bekannte Teilchen. Die Hoffnung ist, damit das sogenannte Hierarchieproblem zu lösen, also die Frage, warum die Higgsmasse so viel kleiner ist als die Planck-Skala, wo Quantengravitation wichtig würde. Stringtheorien verlegen die Physik in zehn oder elf Dimensionen und versuchen, alle Kräfte durch schwingende eindimensionale Objekte zu vereinheitlichen. Große vereinheitlichte Theorien, die sogenannten GUTs, verschmelzen die drei Kräfte des Standardmodells in einer größeren Symmetriegruppe, typischerweise SU(5), SO(10) oder einer noch größeren.

All diese Ansätze haben trotz jahrzehntelanger intensiver Arbeit noch keinen einzigen experimentell bestätigten Treffer erzielt. Am Large Hadron Collider wurden die Signaturen der Supersymmetrie systematisch gesucht und nicht gefunden, und das bei Energien, bei denen die meisten supersymmetrischen Modelle Signale vorhergesagt hatten. Die Protonenzerfälle, die GUT-Theorien vorhersagen, wurden in riesigen unterirdischen Detektoren, mit vielen Tonnen Wasser oder flüssigem Argon, jahrelang beobachtet und nicht gefunden. Die Stringtheorie hat bislang keine einzige überprüfbare quantitative Vorhersage produziert, die sich von denen des Standardmodells unterscheidet.

Es ist möglich, dass all diese Theorien grundsätzlich richtig sind und die Experimente einfach noch nicht empfindlich genug sind. Das ist eine legitime wissenschaftliche Position. Aber es ist auch möglich, dass die Richtung falsch ist, dass mehr Kompliziertheit nicht der richtige Weg zu mehr Verständnis ist.

Was wäre die Alternative? Man könnte versuchen, von einer ganz anderen Seite anzufangen. Nicht mit mehr Kompliziertheit, sondern mit weniger. Nicht mit mehr Annahmen, sondern mit so wenigen wie möglich. Die Frage lautet dann nicht: Welche Erweiterung des Standardmodells erklärt die restlichen Parameter? Die Frage lautet: Was ist die minimale Grundlage, aus der die beobachteten Strukturen, die Massen, Mischungswinkel, die Generationenzahl, überhaupt entstehen können?

1.5 Drei Annahmen als Ausgangspunkt

Was in den folgenden Kapiteln entwickelt wird, ist ein Versuch, diese alternative Richtung konsequent zu verfolgen. Er beginnt nicht mit Gleichungen, nicht mit Symmetriegruppen und nicht mit Feldern, sondern mit drei sehr einfachen Annahmen, die so grundlegend sind, dass man kaum weniger annehmen könnte, ohne gar keine Physik zu erhalten.

Die erste Annahme lautet: Es gibt einen Punkt. Nicht in einem vorausgesetzten Raum, sondern schlicht eine erste Auszeichnung, ein Erstes, das von allem anderen verschieden ist, weil es das Erste ist.

Die zweite Annahme lautet: Es gibt einen Takt. Nicht eine kontinuierlich fließende Zeit, sondern eine diskrete Abzählung von Schritten. Ein Schritt folgt dem nächsten, und zwischen den Schritten ist nichts.

Die dritte Annahme lautet: Es gibt eine Regel. Eine Vorschrift, die aus dem, was nach dem letzten Takt vorliegt, das erzeugt, was nach dem nächsten vorliegt.

Das klingt fast zu einfach, um interessant zu sein. Drei Annahmen, und dann? Aber aus diesen drei Elementen, Punkt, Takt, Regel, lässt sich ein erstaunlich reiches Gebäude errichten. Nicht durch willkürliche Hinzufügungen, sondern durch konsequente Anwendung der einfachsten geometrischen Operationen, die man sich denken kann. Und am Ende stößt man auf Strukturen, die das Standardmodell

als freie Parameter behandelt: die Massen, die Mischungswinkel, die Kopplungskonstanten. Nicht als beliebige Messwerte, sondern als Ableitungen einer geometrischen Konstruktion.

Dies ist keine bewiesene Theorie, die hier vorgestellt wird. Es ist eine geometrische Hypothese, die überprüfbare Vorhersagen macht. Wo die Übereinstimmung mit den Messungen gut ist, wird das gesagt. Wo sie unvollständig ist, auch. Am Ende wird deutlich sein, welche Messungen geeignet wären, den Ansatz zu falsifizieren. Denn das ist der eigentliche Test jeder Theorie: nicht was sie erklärt, sondern was sie ausschließt.

KAPITEL 2

Wovon wir ausgehen: ein Punkt, ein Takt

Stellen Sie sich vor, Sie sollen ein Universum entwerfen. Sie haben keine Materialien, keine Blaupause, keine Vorkenntnis darüber, wie so etwas aussehen soll. Nur die Möglichkeit, Annahmen zu machen. Welche Annahmen sind unvermeidlich? Irgendwann müssen Sie sagen: Es gibt ein Erstes. Sei es ein Punkt, ein Atom, eine Schwingung, irgendetwas, das anfängt. Und Sie müssen sagen: Es gibt eine Veränderung. Ohne Veränderung gibt es keine Zeit, keine Abfolge, keine Geschichte. Und schließlich müssen Sie sagen: Es gibt eine Gesetzmäßigkeit. Die Veränderung folgt einer Regel; sie ist nicht beliebig. Andernfalls wäre nichts vorhersagbar, nichts stabil, kein Atom würde sich bilden, keine Struktur halten.

Auf diese drei Annahmen und nur auf diese möchten wir uns im Folgenden stützen.

2.1 Was ein Punkt bedeutet

Der Begriff Punkt ist hier nicht im Sinne der euklidischen Geometrie gemeint, wo ein Punkt ein Element eines bereits vorgegebenen Raumes ist, der seinerseits durch Axiome beschrieben wird. Gemeint ist etwas Radikaleres: ein Punkt als bloße Unterscheidung. Es gibt dieses, und es gibt alles andere. Die Grenze zwischen diesem und dem anderen ist der Punkt. Er ist die minimale Struktur, die eine Auszeichnung überhaupt erlaubt.

Gottfried Wilhelm Leibniz, Philosoph und Mathematiker des siebzehnten Jahrhunderts, hat an genau dieser Stelle eine wichtige Weiche gestellt. Für ihn gab es keinen Raum, der unabhängig von den Dingen in ihm existierte. Raum war die Ordnung der gleichzeitig existierenden Dinge. Ohne Dinge kein Raum. Diese relationale Ontologie, also die Auffassung, dass Beziehungen grundlegender sind als Objekte, war zu Leibniz' Zeiten eine Minderheitsmeinung. Isaac Newton glaubte an einen absoluten Raum und eine absolute Zeit, die existierten unabhängig davon, ob nun Materie darin war oder nicht. Der Streit zwischen Leibniz und Samuel Clarke, Newtons Sprecher in dieser Auseinandersetzung, ist in einem Briefwechsel dokumentiert, der zu den aufregendsten Quellen der Naturphilosophie des Barock gehört.

In der modernen Physik hat Leibniz nachträglich und überzeugend recht bekommen. Die allgemeine Relativitätstheorie zeigt, dass Raum und Zeit nicht der starre Hintergrund sind, auf dem sich Physik abspielt, sondern selbst Teil des physikalischen Systems, formbar durch Masse und Energie. Ein leerer, materiefreier Raum hat in der allgemeinen Relativitätstheorie keine eigenständige, absolute Realität. Und die Quantenmechanik geht noch weiter: Sie beschreibt keine Objekte an bestimmten Orten, sondern Wahrscheinlichkeitsamplituden für Beziehungen zwischen Messungen. Der Ort eines Elektrons ist keine objektive Eigenschaft des Elektrons, sondern eine Relation zwischen dem Elektron und dem Messprozess.

Wenn man also sagt, man beginnt mit einem Punkt, meint man: Es gibt eine erste Unterscheidung. Nicht eine erste Position im Raum, sondern einen ersten Bruch der Gleichförmigkeit. Alles weitere ergibt sich aus diesem Bruch.

> Ein Punkt im Sinne dieses Buches ist keine Position in einem vorausgesetzten Raum. Er ist die minimale Auszeichnung überhaupt: ein Erstes, das sich von allem anderen unterscheidet, weil es das Erste ist. Raum entsteht aus den Beziehungen zwischen Punkten, nicht umgekehrt.

2.2 Was ein Takt bedeutet

Der zweite Begriff ist der Takt. Nicht Zeit als kontinuierlicher, gleichmäßig dahinströmender Fluss, wie Newton sie sich vorstellte, sondern als diskrete Abzählung. Der erste Schritt, der zweite, der dritte. Zwischen den Schritten ist nichts, kein Zwischen-Zustand, kein Dazwischen. Es gibt Takt 1, dann Takt 2, und der Übergang ist die Anwendung der Regel.

Diese Diskretion der Zeit ist keine willkürliche Einschränkung, die der Bequemlichkeit halber eingeführt wird. Sie spiegelt eine fundamentale Eigenschaft der Physik wider. Max Planck führte 1900 das Wirkungsquantum h ein, und er nannte es selbst eine desperate Maßnahme. Er hatte das Problem der Hohlraumstrahlung zu lösen: Klassisch sagte die Theorie vorher, dass ein Körper bei Raumtemperatur vorwiegend kurzwellige Strahlung, also Röntgenstrahlen und Ultraviolett, abgeben müsste, was offensichtlich nicht stimmt. Die einzige mathematische Lösung, die funktionierte, war die Annahme, dass Energie nur in diskreten Paketen ausgetauscht werden kann. Nicht weil das physikalisch schön war, im Gegenteil, Planck war von dieser Annahme zunächst wenig begeistert, sondern weil das Experiment es unerbittlich verlangte.

Einstein griff diesen Gedanken 1905 auf und machte ihn konkreter: Licht besteht aus Lichtquanten, heute Photonen genannt, diskreten Energiepaketen. Arthur Compton zeigte 1923, dass diese Lichtquanten tatsächlich Impuls tragen und ihn bei Streuung an Elektronen übertragen, genau wie Billardkugeln. Die Diskretion der Energie und der Wechselwirkung war keine Hilfskonstruktion mehr, sondern Realität.

Die Vorstellung, die Zeit fließe glatt und stetig dahin wie ein Fluss, ist eine Abstraktion aus unserer makroskopischen Alltagserfahrung. Für die Beschreibung von Wellen in einem See ist das eine gute Näherung. Für die Physik auf der kleinsten Skala ist sie es nicht. Und wenn man von vorne anfängt, ohne makroskopische Intuitionen vorauszusetzen, ist Diskretion die einfachere Annahme: Sie braucht kein Kontinuum, kein Differential, keine Analysis. Sie braucht nur Zählen.

2.3 Was eine Regel bedeutet

Die Regel ist die dritte und vielleicht wichtigste Annahme. Sie legt fest, wie aus dem gegenwärtigen Zustand des Systems der nächste Zustand entsteht. Eine Regel ist minimal, wenn sie die wenigste Information trägt, die nötig ist, um den Übergang eindeutig zu bestimmen.

Die einfachste Regel ist die Spiegelung: Gegeben einen Punkt, erzeuge den Spiegelpunkt bezüglich eines Zentrums. Oder, etwas abstrakter: Gegeben einen Zustand, wende eine festgelegte Transformation an, und was herauskommt, ist der neue Zustand. Die Frage, welche Transformation, wird nicht willkürlich beantwortet, sondern durch eine Forderung: Welche Transformation enthält die wenigste Willkür bei gegebener Struktur?

Präziser gesagt: Wenn man verlangt, dass die Transformation eine Symmetrie besitzt, also dass sie die geometrische Struktur des Systems erhält, dann ist die Auswahl der möglichen Transformationen stark eingeschränkt. Unter allen möglichen Symmetrietransformationen gibt es eine, die in einem genau definierten Sinn minimal ist. Diese minimale,

symmetrische, strukturerhaltende Transformation ist der Kern des Modells.

Es wird sich zeigen, dass man diese minimale Regel mit der Symmetriegruppe des Fünfecks identifizieren kann. Aber bevor wir so weit sind, müssen wir Schritt für Schritt vorgehen: zuerst von einem Punkt zu einer Linie, dann zu einem Dreieck, dann zu einem Fünfeck.

2.4 Diskretion und Physik

Dass die Zeit diskret sein könnte auf der fundamentalsten Ebene, ist in der Physik keine neue Idee. Die Planck-Zeit, also die Zeit, die Licht braucht, um die Planck-Länge zu durchqueren, beträgt ungefähr 10^{-43} Sekunden. Das ist so kurz, dass kein Experiment der Welt je in diese Skala vordringen könnte. In vielen Quantengravitationstheorien, darunter der Schleifenquantengravitation, wird vermutet, dass die Zeit unterhalb dieser Skala keine kontinuierliche Größe mehr ist, sondern eine diskrete.

Unser Modell macht keine Aussage darüber, wie lang der Takt in Sekunden ist. Der Takt ist eine abstrakte Abzählung. Was zählt, sind die Verhältnisse, die sich aus der wiederholten Anwendung der Regel ergeben, nicht die absolute Zeitskala. Die Massen der Teilchen werden nicht in Sekunden gemessen; sie sind dimensionslose Verhältnisse, wenn man sie auf eine gemeinsame Referenzgröße bezieht. Und solche Verhältnisse entstehen aus diskreten Zähler-Nenner-Verhältnissen auf natürliche Weise.

2.5 Zustand und Übergang

Bevor wir im nächsten Kapitel zur Entstehung der Linie übergehen, lohnt sich eine kurze Formalisierung des bisher Gesagten, ohne jedoch in technische Formalismen abzugleiten.

Einen Zustand nennen wir das, was nach Anwendung aller bisherigen Takte vorliegt: eine Menge von Punkten, eine geometrische Konfiguration, alles, was zu einem bestimmten Zeitpunkt da ist. Einen Übergang nennen wir die Anwendung der Regel, die einen Zustand in den nächsten überführt. Die Regel selbst ist fest; sie verändert sich nicht. Nur die Konfiguration ändert sich von Schritt zu Schritt.

Man kann das auch so sagen: Das System hat kein Gedächtnis jenseits seines gegenwärtigen Zustandes. Der nächste Zustand hängt ausschließlich vom gegenwärtigen ab. Das ist das Markov-Prinzip, und es ist kein Zufall, dass es in der Quantenmechanik eine zentrale Rolle spielt. Die Schrödingergleichung ist in diesem Sinne eine Markov-Gleichung: Wer den gegenwärtigen Zustand kennt, kennt alle zukünftigen Zustände. Kein weiteres Gedächtnis über die Vergangenheit ist erforderlich.

Abbildung 2.1. Die Genese: Vom Punkt über die Linie und das Dreieck zum Fünfeck und Pentagramm. Jede Stufe entsteht durch die wiederholte Anwendung einer einzigen einfachen Regel aus der vorherigen.

Lesart Informatikerin

Ein Zustand und eine Übergangsregel: Das ist die minimale Definition eines endlichen Automaten. In der theoretischen Informatik beschreibt ein deterministischer endlicher Automat ein System, dessen nächster Zustand vollständig durch den gegenwärtigen Zustand und ein Eingabesymbol bestimmt wird. Was dieses Buch in geometrischer Sprache entwickelt, kennt die Informatik als Berechnungsmodell. Die interessante Frage ist: Wel-

che Strukturen entstehen zwangsläufig, wenn man die minimale Übergangsregel auf einer geometrischen Ausgangskonfiguration wiederholt anwendet?

KAPITEL 3

Wie aus einem Takt eine Linie wird

Ein einzelner Punkt ist einsam. Er hat keine Richtung, keine Ausdehnung, keine Beziehung zur Welt außer sich selbst. Man kann ihn nicht messen, weil es kein Zweites gibt, bezüglich dessen man ihn verorten könnte. Er hat keine Dimension, kein Innen, kein Außen. Ein Punkt allein ist nicht nichts, denn er ist ausgezeichnet, er ist das Erste, aber er ist der ärmste Zustand, den man sich vorstellen kann.

Was ändert sich, wenn die Regel zum ersten Mal angewendet wird?

3.1 Die erste Verdopplung

Die einfachste Regel, die man sich vorstellen kann, ist diese: Erzeuge aus dem gegebenen Punkt einen zweiten, indem du ihn durch ein Zentrum spiegelst. Das Zentrum ist, solange es kein anderes gibt, der Punkt selbst, beziehungsweise der unmittelbar benachbarte Mittelpunkt des

ersten Intervalls, das wir noch definieren müssen. Das Ergebnis ist ein zweiter Punkt.

Die beiden Punkte haben nun einen Abstand zueinander. Das ist der erste Längenmaßstab. Er ist nicht absolut, nicht in Metern oder Lichtjahren angegeben, aber er ist die erste Relation. Alles, was später folgt, wird als Vielfaches oder Bruchteil dieses ersten Abstandes gemessen.

Zwei Punkte sind bereits reicher als einer. Sie definieren eine Richtung, nämlich die Verbindungslinie. Sie definieren ein Intervall, nämlich den Bereich zwischen ihnen. Und sie definieren eine Symmetrie: die Spiegelung, die den ersten Punkt in den zweiten überführt und umgekehrt. Diese einfachste Symmetriegruppe hat genau zwei Elemente, die Identität und die Spiegelung, und wird in der Mathematik als $\mathbb{Z}_2$ bezeichnet, die zyklische Gruppe der Ordnung zwei.

Aber zwei Punkte sind noch keine Linie. Dieser Unterschied ist wichtig und wird oft übersehen.

3.2 Was eine Linie von zwei Punkten unterscheidet

Zwei Punkte sind zwei Objekte. Eine Linie ist eine Verbindung, ein kontinuierlicher Zusammenhang, etwas, das zwischen den Punkten liegt und alle Zwischenpositionen einschließt. Wie entsteht dieser Unterschied?

Wenn wir in der Sprache unseres Modells bleiben, dann entsteht eine Linie nicht aus zwei Punkten allein, sondern aus der Beziehung zwischen ihnen zusammen mit der Regel, die diese Beziehung erzeugt hat. Die Linie ist die Erinnerung des Übergangs, die Spur der Transformation. Ein Billardspieler, der eine Kugel anstößt, hinterlässt keine Spur; aber das Licht, das durch eine Glasscheibe fällt und in einem

Staubkorn gebrochen wird, zeichnet seine Bahn nach. Die Linie ist die Bahn.

In der Geometrie unterscheidet man, was eine Linie von einer Zweipunktmenge trennt, durch den Begriff der Dimension. Eine Menge von Punkten ohne inneren Zusammenhang hat die topologische Dimension null: Man braucht keine kontinuierliche Zahl, um jeden Punkt zu beschreiben, man kann ihn einfach aufzählen. Eine Linie hat die Dimension eins: Um jeden Punkt auf ihr anzugeben, genügt eine einzige Zahl, zum Beispiel seine Position auf der Linie gemessen vom Ausgangspunkt, und alle möglichen Werte dieser Zahl realisieren sich als tatsächliche Punkte.

Der Übergang von der Dimension null zur Dimension eins ist kein kleiner Schritt. Er ist qualitativ. Er bedeutet: Die Verbindung wird zur Struktur.

> Eine Linie entsteht nicht dadurch, dass man zwei Punkte hinschreibt und erklärt: das ist eine Linie. Sie entsteht durch eine Regel, die einen Zusammenhang zwischen den Punkten herstellt. Die Linie ist dieser Zusammenhang, die Beziehungsstruktur, nicht die Menge.

3.3 Zähnezahl und Periode

Es nützt nichts, Linien unendlicher Länge zu betrachten. Unendlichkeit ist physikalisch nicht greifbar, und wenn man ehrlich ist, ist sie mathematisch auch nicht ganz unproblematisch. Was uns interessiert, sind Linien mit einer bestimmten, endlichen Anzahl von Schritten, und die daraus entstehenden geschlossenen Strukturen.

Wir nennen diese Schrittanzahl die *Zähnezahl*, in Anlehnung an das Bild eines Zahnrades, dessen Zähne die diskreten Positionen markieren. Ein Zahnrad mit fünf Zähnen dreht sich, wenn es mit einem anderen Zahnrad kämmt, in ganz anderen Verhältnissen als eines mit vier

Zähnen. Wann kommen beide Räder nach Beginn des Kämmelns wieder gleichzeitig in ihrer Ausgangsstellung an? Genau dann, wenn die Anzahl der bisher zurückgelegten Schritte ein gemeinsames Vielfaches ihrer Zähnezahlen ist. Das ist das kleinste gemeinsame Vielfache, ein Begriff aus der Schulmathematik, der hier eine klare physikalische Bedeutung erhält.

Drei ineinandergreifende Zahnräder mit den Zähnezahlen fünf, vier und fünf kommen nach zwanzig Schritten wieder gemeinsam in ihre Ausgangsstellung. Denn das kleinste gemeinsame Vielfache von fünf und vier ist zwanzig. Diese Zahl zwanzig ist keine willkürlich gewählte Konstante. Sie ist die natürliche Resonanzperiode des Systems, das aus der Symmetrie des Fünfecks hervorgeht, und sie wird in späteren Kapiteln immer wieder auftauchen.

Die drei Tick-Frequenzen, auf die wir stoßen werden, sind $\omega_1 = 2\pi/5$, $\omega_2 = \pi/2$ und $\omega_3 = 4\pi/5$. Die erste entspricht einer Fünftelperiode, die zweite einer Viertelperiode, die dritte zwei Fünfteln. Das kleinste gemeinsame Vielfache der Perioden $5, 4$ und $5/2$ ist wieder zwanzig. Nach zwanzig Ticks kehren alle drei Frequenzen gleichzeitig zu ihren Ausgangswerten zurück: eine vollständige Resonanz.

3.4 Dimension durch Iteration

Wir haben die Linie als das Ergebnis des ersten Takts kennengelernt. Wenn man die Regel ein weiteres Mal anwendet, entsteht ein dritter Punkt. Dann ein vierter. Dann ein fünfter. Wenn diese Punkte auf einer geraden Linie angeordnet bleiben, wächst die Linie und die Dimension bleibt eins.

Aber was, wenn man die Regel nicht mehr auf die gerade Linie, sondern auf eine neue Richtung anwendet? Dann entsteht aus der Linie ein zweidimensionales Objekt. Welche neuen Richtungen erlaubt sind, hängt von der Symmetriegruppe des Ausgangsobjekts ab. Für die Linie mit ihrer $\mathbb{Z}_2$-Symmetrie gibt es genau eine ausgezeichnete

neue Richtung: die senkrechte. So entsteht aus einer Linie ein Quadrat oder Rechteck.

Aber diese Konstruktion nutzt die Symmetrie der Linie, nicht eine reichere Struktur. Wenn man stattdessen von einem Kreis ausgeht, also von der Symmetrie der Rotationsgruppe, hat man unendlich viele mögliche Richtungen. Die interessanteste Wahl ist diejenige, die eine endliche, geschlossene Struktur mit minimaler Zahl von Ecken erzeugt, die zugleich eine unlösbare Symmetriegruppe trägt. Das ist das Fünfeck.

Lesart Architektin

Ein Tragwerk besteht aus Knoten und Stäben. Ohne Verbindungen zwischen den Knoten gibt es kein Tragwerk, nur eine Sammlung von Stahlprofilen. Was trägt, ist die Beziehungsstruktur: Welche Knoten sind verbunden? In welchem Winkel? Wie steif? Ein Punkt allein trägt nichts. Erst die Linie, die erste Verbindung, macht aus Punkten Architektur. Ein Fachwerk ist stark, weil es Dreiecke enthält, die sich nicht verformen können. Ein Viereck verformt sich, wenn es nicht ausgesteift ist. Die Geometrie entscheidet über die Tragfähigkeit. Dasselbe gilt für die Physik: Die geometrische Struktur entscheidet, was stabil ist und was nicht.

3.5 Die erste Generation der Geometrie

Das Ergebnis nach dem ersten Takt nennen wir die erste Generation der geometrischen Entwicklung. Sie besteht aus einem Ausgangspunkt und einem gespiegelten Punkt, verbunden durch eine Linie. Das ist der einfachste Zustand, der eine Beziehung enthält.

Man könnte versucht sein, diesen Zustand mit dem einfachsten gebundenen physikalischen System zu vergleichen: dem Proton-Elektron-Paar, das das Wasserstoffatom bildet. Natürlich ist das Wasserstoffa-

tom das Ergebnis einer langen Kette quantenmechanischer Überlegungen und nichts, was direkt aus unserer geometrischen Konstruktion folgt. Aber die strukturelle Analogie ist reizvoll: Das Einfachste ist nicht leer, sondern ein gebundenes Paar.

Im nächsten Schritt wird aus diesem Paar ein Dreieck. Dafür muss die Regel nicht zweimal, sondern dreimal angewendet werden, auf eine geschlossene Kurve, einen Kreis. Und damit betreten wir das Reich der Vielecke.

KAPITEL 4

Das Dreieck und das Fünfeck

Wenn man geometrische Objekte nicht als statische Figuren betrachtet, die auf dem Papier liegen, sondern als Ergebnisse von Prozessen, dann verändert sich die Frage, die man stellt. Nicht: Was ist ein Dreieck? Sondern: Wie entsteht ein Dreieck, und welche Regel erzeugt es aus dem Einfacheren? Diese Sichtweise, die konstruktive Geometrie gegenüber der deskriptiven, ist im Grunde die Sichtweise der Physik: Nicht beschreiben, was da ist, sondern erklären, warum es da ist.

4.1 Drei Punkte auf einem Kreis

Nehmen wir an, die Spiegelungsregel wird auf einem Kreis angewendet. Ein Kreis ist die natürlichste geschlossene Figur, die entsteht, wenn man von einem Mittelpunkt aus alle Punkte mit gleichem Abstand betrachtet. Er ist, in einer bestimmten Hinsicht, das symmetrischste

ebene Objekt überhaupt: Jede Drehung um den Mittelpunkt führt den Kreis auf sich selbst über.

Wenn man drei Punkte auf einem Kreis gleichmäßig verteilt, erhält man ein gleichseitiges Dreieck. Gleichmäßig verteilt bedeutet: Die Winkelabstände zwischen je zwei benachbarten Punkten sind gleich, nämlich jeweils 120 Grad. Das Dreieck hat drei Ecken, drei Kanten gleicher Länge und drei Winkel von je 60 Grad.

Was ist die Symmetriegruppe dieses Dreiecks? Es sind alle Drehungen und Spiegelungen, die das Dreieck auf sich selbst abbilden, also in einen Zustand überführen, der von außen nicht unterscheidbar ist vom Ausgangszustand. Es gibt drei Drehungen: um 0, 120 und 240 Grad. Und es gibt drei Spiegelungen: je eine durch die drei Symmetrieachsen, die durch eine Ecke und den Mittelpunkt der gegenüberliegenden Seite verlaufen. Zusammen sind das sechs Symmetrien. Diese Gruppe heißt S_3, die symmetrische Gruppe vom Grad 3, oder auch die Diedergruppe D_3.

S_3 hat eine bemerkenswerte Eigenschaft: Sie ist die kleinste nichtabelsche Gruppe. Nichtabelsch bedeutet, dass die Reihenfolge der Anwendung von Symmetrien eine Rolle spielt. Erst drehen und dann spiegeln ergibt im Allgemeinen etwas anderes als erst spiegeln und dann drehen. Das Dreieck ist also das einfachste geometrische Objekt, dessen Symmetriegruppe nicht-kommutativ ist. Aber es ist noch nicht das geometrische Objekt, das uns am meisten interessiert.

4.2 Das Viereck und seine Grenzen

Bevor wir zum Fünfeck kommen, lohnt ein Blick auf das Viereck, um zu verstehen, was am Fünfeck besonders ist. Ein gleichseitiges Viereck, also ein Quadrat, hat acht Symmetrien: vier Drehungen und vier Spiegelungen. Die zugehörige Gruppe ist D_4, die Diedergruppe der Ordnung acht. Diese Gruppe ist lösbar, also in einem algebraischen

Sinn zahm. Die algebraischen Gleichungen, die mit dem Quadrat zusammenhängen, können durch Wurzelausdrücke gelöst werden.

Dasselbe gilt für das Dreieck. Die Gruppe S_3 ist lösbar. Man kann die geometrische Konstruktion des gleichseitigen Dreiecks vollständig durch Zirkel und Lineal durchführen, was algebraisch bedeutet, dass man nur Quadratwurzeln benötigt. Das Sechseck, das Achteck, das Zehneck: alles lösbar, alles durch Zirkel und Lineal konstruierbar.

Das Fünfeck ist die erste Ausnahme. Ein regelmäßiges Fünfeck lässt sich zwar durch Zirkel und Lineal konstruieren, das hat bereits Euklid gewusst, aber die algebraischen Gleichungen, die seine tiefere Symmetriestruktur beschreiben, reichen über einfache Wurzeln hinaus. Die Symmetriegruppe des Fünfecks, die Gruppe A_5, ist nicht lösbar. Das ist der entscheidende Unterschied.

4.3 Galois und das Ende der Lösbarkeit

Évariste Galois war neunzehn Jahre alt, als er sein erstes bedeutendes Resultat über Gleichungen fünften Grades erzielte. Er wurde zweiundzwanzig Jahre alt, erschossen in einem Duell am 31. Mai 1832, unter Umständen, die bis heute nicht vollständig geklärt sind. Die Nacht vor dem Duell schrieb er in einem langen Brief an seinen Freund Auguste Chevalier nieder, was er entdeckt hatte, und bat ihn, den Brief an die führenden Mathematiker seiner Zeit weiterzuleiten, an Carl Friedrich Gauß und Carl Jacobi. Er schloss den Brief mit den Worten: »Ich habe keine Zeit mehr.«

Was Galois in dieser letzten Nacht zusammenfasste, war eine vollständige Theorie der algebraischen Gleichungen. Er zeigte, dass jede Gleichung eine sogenannte Galoisgruppe besitzt, eine Gruppe von Permutationen ihrer Lösungen, die beschreibt, wie die Lösungen unter algebraischen Operationen ineinander übergehen. Die Gleichung ist dann durch Wurzelausdrücke lösbar, wenn und nur wenn ihre Galois-

gruppe auflösbar ist, also in eine Kette abelscher Untergruppen zerlegt werden kann.

Für Gleichungen zweiten Grades ist die Galoisgruppe $\mathbb{Z}_2$, zyklisch und damit abelsch. Für Gleichungen dritten Grades ist sie S_3 oder eine Untergruppe davon, auflösbar. Für Gleichungen vierten Grades ist die Galoisgruppe S_4 oder kleiner, ebenfalls auflösbar. Aber für allgemeine Gleichungen fünften Grades ist die Galoisgruppe S_5, und die Normalteilerstruktur von S_5 enthält A_5, die alternierende Gruppe, die einfach und nichtabelsch ist und damit die Lösbarkeit verhindert.

Das ist nicht eine technische Besonderheit, die man durch raffiniertere Methoden umgehen könnte. Es ist ein fundamentales Theorem. Der allgemeine Weg von den Koeffizienten zu den Lösungen führt durch A_5, und A_5 lässt sich nicht durch Wurzeln überbrücken.

Das Fünfeck ist das kleinste reguläre Vieleck, dessen volle Symmetriegruppe einfach und nichtabelsch ist. Die Unlösbarkeit der allgemeinen Gleichung fünften Grades, bewiesen von Galois 1832, ist dieselbe Aussage in algebraischer Sprache. Das Fünfeck ist die geometrische Schwelle, jenseits derer die strukturelle Komplexität eine neue Qualität annimmt.

4.4 Der goldene Schnitt

Mit dem Fünfeck betritt eine Zahl die Bühne, die in der Geschichte der Mathematik, der Kunst und der Natur immer wieder auftaucht: der goldene Schnitt. Er entsteht aus dem Fünfeck auf die natürlichste Weise der Welt.

Zeichnet man alle fünf Diagonalen eines regelmäßigen Fünfecks ein, entsteht im Innern automatisch ein kleineres Fünfeck, und darin wieder ein noch kleineres, und so fort bis ins Unendliche. Die Länge einer Diagonale, geteilt durch die Länge einer Seite des Fünfecks, ist

eine feste, irrationale Zahl. Man nennt sie φ, den goldenen Schnitt, und sie ist gleich $(1 + \sqrt{5})/2 \approx 1{,}618$.

Was diese Zahl so besonders macht, ist ihre Selbstähnlichkeit. Es gilt die Gleichung $\varphi^2 = \varphi + 1$. Das bedeutet: Das Quadrat von φ ist gleich φ plus eins. Eine direktere Formulierung ist $\varphi = 1 + 1/\varphi$, also φ enthält sich selbst in seiner eigenen Beschreibung. Das ist die einzige positive reelle Zahl, die das tut. Als Kettenbruch geschrieben, ist φ das Einfachste, was möglich ist: lauter Einsen.

Diese Eigenschaft macht φ zur natürlichen Basis eines Skalierungssystems, das keine anderen Parameter einführt. Wenn man eine Skala von Werten durch Potenzen einer einzigen Zahl beschreiben will, und wenn diese Zahl keine willkürliche Wahl sein soll, sondern durch die Geometrie des Fünfecks erzwungen wird, dann ist φ die einzige Kandidatin.

Im weiteren Verlauf dieses Buches wird sich zeigen, dass die Massen der Quarks und Leptonen durch Potenzen von φ mit rationalen Exponenten beschrieben werden können, und zwar mit Nennern, die Teiler von sechzig sind. Warum sechzig? Weil sechzig die Ordnung der Symmetriegruppe A_5 ist. Die Verbindung zwischen dem Fünfeck, dem goldenen Schnitt und den Teilchenmassen ist kein numerisches Spiel, sondern eine strukturelle Konsequenz.

4.5 Die Diagonale und das Verhältnis

Um die geometrische Herkunft von φ noch einmal explizit zu betonen: Man nehme ein regelmäßiges Fünfeck mit der Seitenlänge s und ziehe eine Diagonale der Länge d. Dann ist $d/s = \varphi$. Das ist exakt, keine Näherung. Und wenn man denselben Schritt wiederholt, wenn man die Diagonale des kleineren Fünfecks durch seine Seite dividiert, erhält man wieder φ. Das Fünfeck ist in sich selbst golden.

Dieses Verschachteln und Selbstähnlichsein ist dieselbe Eigenschaft, die in der Natur als fraktale Struktur bekannt ist. Küstenlinien, Blat-

tadern, Blumenmuster: Sie sehen auf verschiedenen Maßstabsebenen ähnlich aus. Der goldene Schnitt ist gewissermaßen das einfachste fraktale Prinzip, das exakt und algebraisch ist, nicht nur ungefähr.

Lesart Buchhalter

Eine Bilanz ist dann ausgeglichen, wenn Soll und Haben übereinstimmen. Symmetrie ist im Grunde dasselbe Prinzip: Eine Operation, die auf beide Seiten gleichermaßen wirkt, lässt die Bilanz unverändert. Emmy Noether hat 1915 bewiesen, dem sogenannten Noether-Theorem, dass jede kontinuierliche Symmetrie einer Erhaltungsgröße entspricht. Zeitliche Symmetrie, also dass die Physik heute dieselbe ist wie gestern, erzeugt die Energieerhaltung. Räumliche Symmetrie erzeugt die Impulserhaltung. Das Fünfeck bringt eine neue Art von Symmetrie ins Spiel: diskret und fünffach. Die Erhaltungsgrößen, die dazu gehören, sind keine kontinuierlichen Größen wie Energie und Impuls, sondern diskrete Quantenzahlen, die Eigenschaftsmarken der Elementarteilchen.

4.6 Warum nicht das Siebeneck, das Neuneck?

Eine naheliegende Frage ist: Wenn das Fünfeck so besonders ist, was ist dann mit dem Siebeneck, dem Neuneck, dem Elfeck? Sind sie weniger besonders? Haben sie nicht auch nichtabelsche Symmetriegruppen?

Die Symmetriegruppe des Siebenecks hat 14 Elemente und ist lösbar. Genauso die des Neunecks und des Elfecks. Die einfachen Gruppen kommen nicht bei jedem Vieleck vor. Die nächste einfache Gruppe nach A_5 wäre A_6 mit 360 Elementen, dann A_7 mit 2520 Elementen, und so weiter. Diese Gruppen sind erheblich komplizierter. Das Fünfeck und die Gruppe A_5 sind die minimale Schwelle: Das Einfachste, das reich genug ist.

Darüber hinaus gibt es sogenannte sporadische einfache Gruppen, die nicht zur Familie der alternierenden Gruppen oder der Gruppen vom Lie-Typ gehören. Die kleinste von ihnen ist die Mathieu-Gruppe M_{11} mit 7920 Elementen, weit entfernt von der Minimalität, die wir suchen.

A_5 steht also allein an der Grenze: die kleinste nichtabelsche einfache Gruppe, das erste Objekt, das unlösbar und zugleich minimal ist. Wenn man von der Forderung nach Minimalität ausgeht, kommt man zwangsläufig auf sie.

KAPITEL 5

Pentagramm und Ikosaeder

Wenn man alle fünf Diagonalen eines regelmäßigen Fünfecks einzeichnet, entsteht im Innern automatisch ein Stern: das Pentagramm. Es ist eine der ältesten geometrischen Figuren der Menschheitsgeschichte. Pythagoreische Schulen des fünften vorchristlichen Jahrhunderts verwendeten es als geheimes Erkennungszeichen. Es taucht in der Symbolik des Mittelalters auf, in der Alchemie, in verschiedenen religiösen Traditionen, und es hat bis in die Gegenwart eine symbolische Kraft, die kaum eine andere geometrische Figur besitzt.

Aber die Faszination mit dem Pentagramm war nie nur ästhetisch oder symbolisch. Wer genau hinsieht, erkennt: Das Pentagramm zerschneidet sich selbst in Abschnitte, die genau im goldenen Schnitt zueinander stehen. Jede Diagonale wird durch die beiden anderen Diagonalen, die sie kreuzen, in drei Teile geteilt. Der mittlere Teil verhält sich zum äußeren Teil wie der äußere Teil zum ganzen: Das Verhältnis

ist immer φ. Das Pentagramm ist ein einziges, in sich kohärentes Geflecht goldener Proportionen, ein Netz aus φ.

5.1 Von der Ebene in den Raum

Das Fünfeck und das Pentagramm sind ebene Figuren. Die Physik spielt sich in drei Dimensionen ab. Wie kommt man von der Ebene in den Raum, und welcher dreidimensionale Körper entspricht dem Fünfeck?

Die Antwort ist eindeutig und schön: Es ist das Ikosaeder. Ein Ikosaeder ist ein platonischer Körper mit zwölf Ecken, dreißig Kanten und zwanzig gleichseitigen Dreiecksflächen. Wenn man eine Ecke des Ikosaeders betrachtet und auf die fünf anliegenden Flächen schaut, sieht man ein Fünfeck. Das Ikosaeder ist buchstäblich ein Fünfeck, das in drei Dimensionen gewickelt wurde.

Die Symmetriegruppe des Ikosaeders, also die Menge aller Drehungen und Spiegelungen, die das Ikosaeder auf sich selbst abbilden, ist dieselbe wie die des Pentagramms: die Gruppe A_5. Das ist keine Koinzidenz, sondern eine tiefe algebraische Tatsache, die Felix Klein in seinem Buch von 1884 ausführlich dargestellt hat.

5.2 Die Symmetriegruppe A_5

Was ist A_5 genau? Es ist die alternierende Gruppe vom Grad 5, also die Gruppe aller geraden Permutationen von fünf Elementen.

Eine Permutation von fünf Elementen ist eine Anordnung der fünf Elemente. Es gibt $5! = 120$ solcher Anordnungen. Jede Anordnung lässt sich als Komposition von Vertauschungen (sogenannten Transpositionen) schreiben, also von Operationen, die genau zwei Elemente miteinander tauschen. Manche Anordnungen brauchen eine gerade An-

zahl von Transpositionen, manche eine ungerade. Die geraden bilden eine Untergruppe, eben A_5, mit genau 60 Elementen.

A_5 hat fünf Konjugationsklassen: die Klasse der Identität, die Klasse der Permutationen vom Typ (12)(34) (also Produkte von zwei disjunkten Transpositionen), die Klasse der Dreizykel, und zwei Klassen von Fünfzykeln. Diese fünf Klassen entsprechen, nach einem allgemeinen Theorem der Darstellungstheorie, genau fünf irreduziblen Darstellungen der Gruppe. Ihre Dimensionen sind 1, 3, 3, 4 und 5.

Ein entscheidendes Kontrollkriterium: Die Summe der Quadrate dieser Dimensionen muss gleich der Gruppenordnung sein. Und tatsächlich gilt: $1^2 + 3^2 + 3^2 + 4^2 + 5^2 = 1 + 9 + 9 + 16 + 25 = 60$. Das ist kein Zufall und keine reine Mathematik ohne physikalischen Bezug. Diese fünf Darstellungstypen entsprechen fünf verschiedenen Typen von Objekten, die das System tragen kann. Drei Dimensionen zweimal (dreidimensionale Darstellungen), eine vierdimensionale, eine fünfdimensionale. Das Standardmodell kennt Skalare, Spinoren, Vektoren und Tensoren. Die Dimensionen der Darstellungen von A_5 decken die benötigte Struktur ab.

> Die alternierende Gruppe A_5 hat genau 60 Elemente, fünf irreduzible Darstellungen mit den Dimensionen 1, 3, 3, 4 und 5, und ist die kleinste nichtabelsche einfache Gruppe. Sie ist die Symmetriegruppe sowohl des Pentagramms als auch des Ikosaeders und der gemeinsame algebraische Kern beider.

5.3 Einfach, nichtabelsch, minimal

Drei Eigenschaften von A_5 verdienen besondere Aufmerksamkeit, weil sie zusammen die Eindeutigkeit begründen.

Erstens: A_5 ist einfach. Eine Gruppe heißt einfach, wenn sie keine echten nichttrivialen Normalteiler hat. Ein Normalteiler einer Gruppe G ist eine Untergruppe N, für die gilt: Für jedes Element g aus G ist

auch das Konjugat gNg^{-1} gleich N. Das Fehlen solcher Normalteiler bedeutet, dass A_5 in einem algebraischen Sinn unteilbar ist. Man kann sie nicht durch ein einfacheres Objekt parametrisieren; sie ist selbst das Einfachste auf ihrer Ebene.

Zweitens: A_5 ist nichtabelsch. Für zwei Elemente a und b aus A_5 gilt im Allgemeinen $ab \neq ba$. Die Reihenfolge zählt. Das ist physikalisch wichtig, weil die reale Teilchenphysik nichtabelsche Symmetrien benötigt: Die starke Kraft folgt der Eichgruppe SU(3), die schwache der Gruppe SU(2), beide nichtabelsch. Eine abelsche Gruppe könnte die beobachtete Teilchenstruktur nicht tragen.

Drittens: A_5 ist minimal. Unter allen nichtabelschen einfachen Gruppen ist sie die kleinste. Die nächste wäre A_6 mit 360 Elementen, sechsmal so groß. Wenn man nach dem Minimum sucht, findet man A_5.

Diese drei Eigenschaften zusammen machen A_5 zur einzig möglichen Antwort auf die Frage: Was ist die kleinste nichtabelsche einfache Gruppe? Es gibt keine Wahl. Wer Minimalität fordert und Nichtabelschheit und Einfachheit, findet A_5 und nichts anderes.

5.4 Felix Klein und das Ikosaeder-Buch

Felix Klein, Professor in Erlangen, München und Göttingen, ist in der Geschichte der Mathematik vor allem durch sein Erlanger Programm bekannt, das er 1872 als junger Mann formulierte und das Geometrie als Studium der Eigenschaften definierte, die unter einer gegebenen Transformationsgruppe invariant bleiben. Geometrie ist, nach Klein, Gruppentheorie.

Dreizehn Jahre nach dem Erlanger Programm, 1884, veröffentlichte Klein eine schmale, aber außerordentlich einflussreiche Abhandlung: *Vorlesungen über das Ikosaeder und die Auflösung der Gleichungen vom fünften Grade*. Das Buch zeigt im Detail, wie die Symmetriegruppe des Ikosaeders, A_5, an der Lösung der allgemeinen Gleichung

fünften Grades hängt, und es entwickelt eine vollständige Theorie dieser Verbindung.

Kleins Buch ist eines der Meisterstücke der mathematischen Literatur des neunzehnten Jahrhunderts. Es ist kein trockenes Lehrbuch, sondern eine Entdeckungsreise, die von der elementaren Geometrie des Ikosaeders zu den tiefsten Fragen der Algebra und Analysis führt. Klein war überzeugt, dass das Ikosaeder eine besondere Bedeutung in der Mathematik hatte. Er ahnte, vielleicht, nicht, dass diese Bedeutung eines Tages in die Physik der Elementarteilchen reichen würde.

5.5 Warum ausgerechnet diese Gruppe für das Universum?

Hier ist die entscheidende Frage, die den Übergang vom geometrischen Modell zur physikalischen Hypothese markiert: Warum sollte ausgerechnet A_5 für die Struktur des Universums relevant sein?

Die Antwort besteht aus zwei Teilen.

Der erste Teil ist die Minimalität. A_5 ist die kleinste nichtabelsche einfache Gruppe. Wenn man ein System beschreiben will, das nichtabelsche Symmetrie besitzt und sich nicht auf einfachere Symmetrien reduzieren lässt, dann ist A_5 das Minimum. Wer nach dem Einfachsten sucht, das reich genug ist, landet bei A_5.

Der zweite Teil ist die Struktur der Darstellungen. A_5 hat fünf irreduzible Darstellungen. Die beiden dreidimensionalen Darstellungen, mit Dimensionen 3 und 3, ermöglichen es, dreidimensionale innere Räume zu beschreiben, was für die drei Farbladungen der Quarks benötigt wird. Die vierdimensionale Darstellung erlaubt Mischungsstrukturen mit vier Parametern, und die fünfdimensionale erlaubt noch mehr. Und: Die Summe aller Dimensionen ist $1 + 3 + 3 + 4 + 5 = 16$, und $16 = 2^4$, was auf binäre Struktur und auf Spinoren hindeutet.

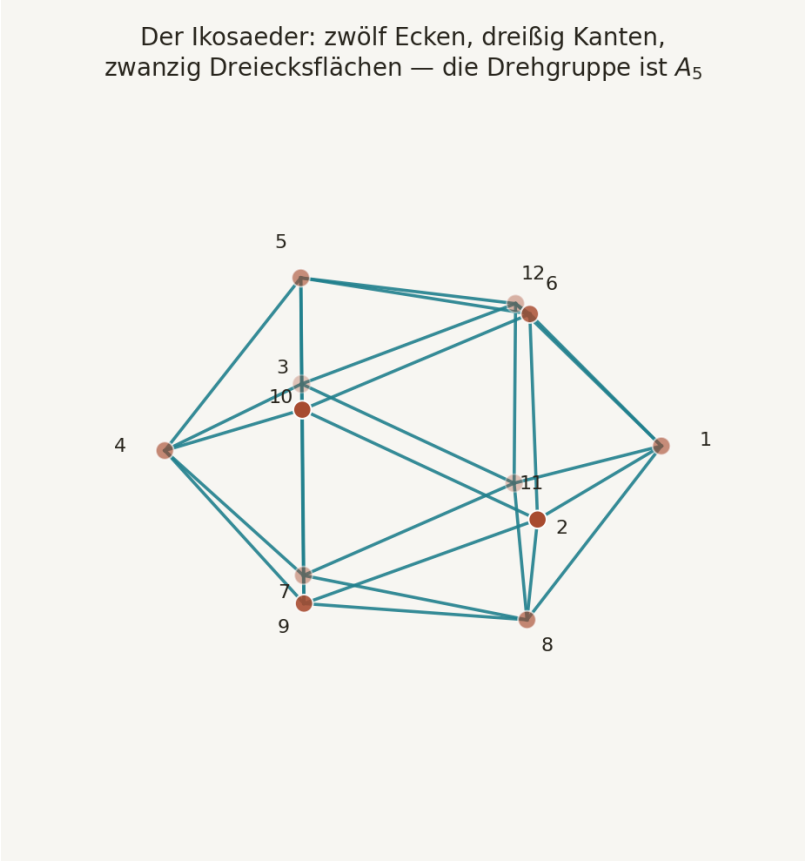

Abbildung 5.1. Das Ikosaeder mit zwölf Ecken, dreißig Kanten und zwanzig gleichseitigen Dreiecksflächen. Seine volle Symmetriegruppe ist die alternierende Gruppe A_5 mit sechzig Elementen, die kleinste nichtabelsche einfache Gruppe.

5.6 Drei Generationen aus sechzig Elementen

Nun zum zentralen Rätsel: Warum gibt es drei Generationen von Teilchen, und nicht zwei oder vier?

In der Sprache der Gruppentheorie fragt man: Warum erlaubt die Struktur von A_5 genau drei Familien? Die Antwort kommt aus der Zerlegung der Gruppenordnung. Es gilt $60 = 3 \times 20$. Die Zahl 20 ist

das kleinste gemeinsame Vielfache von 4 und 5, und 5 und 4 sind die Zähnezahlen der beiden hauptsächlichen Tick-Frequenzen. Das bedeutet: Nach 20 Schritten hat das System eine vollständige Periode durchlaufen, und diese Periode wiederholt sich dreimal innerhalb der gesamten Gruppenordnung 60.

Diese dreifache Periode, dieser dreifache Durchlauf durch 20 Schritte, ist die geometrische Ursache der drei Generationen. Es ist keine ad-hoc-Annahme, sondern eine Konsequenz der Tatsache, dass A_5 genau 60 Elemente hat und 60 durch 20 dreimal teilbar ist.

Dazu passt eine weitere Zahl: Die Tick-Frequenz $\omega_3/\omega_2 = (4\pi/5)/(\pi/2) = 8/5 = 1{,}6$, und $\varphi = 1{,}618\ldots$. Die Abweichung beträgt etwa 1,1 Prozent. Das ist eine erste, grobe Näherung des goldenen Schnitts durch das einfachste rationale Verhältnis kleiner ganzer Zahlen, 8/5, das die Fibonacci-Folge liefert. Kein Zufall, sondern Arithmetik.

5.7 Die Klasse-A-Primzahlen

Die Gruppenordnung 60 und die geometrischen Eigenschaften des Ikosaeders erzeugen drei besondere Primzahlen, die in verschiedenen Kontexten des Modells auftauchen.

Das Ikosaeder hat 12 Ecken, 30 Kanten und 20 Flächen. Wenn man von jeder dieser Zahlen eins subtrahiert, erhält man 11, 29 und 19. Von diesen drei Zahlen sind 11 und 19 Primzahlen, und auch $60 - 1 = 59$ ist eine Primzahl. Diese drei Primzahlen, 11, 19 und 59, nennen wir Klasse-A-Primzahlen, weil sie aus der Geometrie des Ikosaeders, also der Gruppe A_5, entspringen.

Die Zahl 11 taucht in der Struktur der Feinstrukturkonstante auf. Es gilt: $137 = 11^2 + 4^2 = 121 + 16$. Das ist die Fermat-Darstellung von 137 als Summe zweier Quadrate. Jede Primzahl der Form $4k + 1$ hat eine solche Darstellung, und $137 = 4 \times 34 + 1$ ist von dieser Form. Der Faktor 11 in dieser Darstellung ist die Klasse-A-Primzahl aus der Eckenanzahl des Ikosaeders.

Daneben gilt: $137 = 11 \times 12 + 5 = 132 + 5$. Mit $V = 12$ als Eckenanzahl des Ikosaeders geschrieben: $137 = 11 \times V + 5$. Diese Formel ist keine künstlich herbeigerechnete Identität; sie folgt aus der Gleichung $137 = 11^2 + 4^2$ durch eine einfache Umformung. Aber sie zeigt, wie die Zahl 137 mit den Eckenzahlen des Ikosaeders verknüpft ist.

Das ist nicht der Ort, um diese Beziehung vollständig auszuarbeiten. Die späteren Teile des Buches werden sie genauer entwickeln. Aber es ist wichtig zu sehen, dass die Feinstrukturkonstante, das Rätsel von Sommerfeld, Pauli, Eddington und Heisenberg, geometrisch verankert ist. Sie ist keine willkürliche Zahl; sie ist die natürliche Konsequenz einer Geometrie, die mit dem Fünfeck und dem Ikosaeder verbunden ist.

5.8 Der Ikosaeder als Vorbereitung des Hauptteils

Was am Ende dieses ersten Teils vorliegt, ist ein geometrisches Gerüst. Aus drei einfachen Annahmen, einem Punkt, einem Takt, einer Regel, entstehen durch wiederholte Anwendung eine Linie, ein Dreieck, ein Fünfeck, ein Pentagramm, und schließlich, durch Übergang in drei Dimensionen, ein Ikosaeder. Die Symmetriegruppe dieses Ikosaeders ist A_5.

Diese Gruppe trägt in sich die Zahl 60 als Ordnung, die Zahl 20 als minimale Resonanzperiode, die Zahl 3 als Quotient dieser beiden, und die Darstellungsstruktur mit den Dimensionen 1, 3, 3, 4, 5. Sie trägt die Klasse-A-Primzahlen 11, 19, 59. Sie trägt den goldenen Schnitt φ als die geometrische Konstante, die das Fünfeck definiert.

Das alles sind keine eingehenden physikalischen Annahmen. Es sind die Konsequenzen der Minimalität. Wer so wenig wie möglich annimmt und dann fragt, was zwangsläufig folgt, landet bei A_5.

Im nächsten Teil wird dieses geometrische Gerüst mit physikalischen Inhalten gefüllt. Wie werden aus den Darstellungen von A_5 Teilchenfelder? Wie entstehen aus den Potenzen von φ die Fermionmassen? Wie verbindet sich die Resonanzperiode von 20 Ticks mit der Struktur des Vakuumerwartungswertes? Diese Fragen sind der eigentliche Kern des Buches. Aber sie wären nicht zugänglich, wenn man nicht zuerst den geometrischen Boden bereitet hätte.

Das Dreieck haben wir gesehen. Das Fünfeck. Das Pentagramm. Das Ikosaeder. Was bisher nur geometrische Schönheit war, wird im folgenden Teil zu physikalischen Vorhersagen.

Die Symmetriegruppe A_5 des Ikosaeders ist das Ergebnis, nicht die Annahme. Sie entsteht zwangsläufig, wenn man von der minimalen geometrischen Konstruktion ausgeht und fragt, welche Gruppe minimal, nichtabelsch und einfach ist. Ihre Ordnung 60, ihre drei natürlichen Generationen, ihre Darstellungsstruktur und die Klasse-A-Primzahlen sind geometrische Fakten, keine freien Parameter. Darauf baut der Rest des Buches.

Teil II

Das Getriebe der Welt

KAPITEL 6

Was eine Schwingung wirklich ist

> Die Natur spricht die Sprache der Mathematik — und die einfachsten Sätze dieser Sprache sind Wellen.
>
> Galileo Galilei, sinngemäß

In der Alltagssprache ist eine Schwingung eine Art rhythmisches Hin-und-Her, ein Pendel, das schlägt, eine Saite, die zittert, eine Luftsäule, die sich verdichtet und wieder ausdehnt. Wenn man ein Kind auf einer Schaukel anschiebt, beobachtet man eine Schwingung. Wenn ein Weinglas an der richtigen Stelle mit dem nassen Finger umkreist wird und einen feinen, beinahe klagenden Ton gibt, beobachtet man ebenfalls eine Schwingung. Eine Brücke, die im Wind schaukelt, eine Glocke, die ausklingt, der Herzschlag in der Brust — all das sind Schwingungen. Diese Beispiele haben auf den ersten Blick wenig miteinander zu tun, und doch beschreibt dieselbe mathematische Kurve sie alle: die Sinuskurve.

Die Sinuskurve ist vielleicht die wichtigste Kurve der gesamten Naturwissenschaft. Man kann sie sich als Spur vorstellen, die ein Punkt auf dem Rand eines Rades in die Zeit hineinzeichnet, während das Rad gleichmäßig und ohne Unterbrechung rollt. Das Rad dreht sich, der Punkt bewegt sich auf und ab, und wenn man diese Auf-und-ab-Bewegung als Kurve über die Zeit aufträgt, erhält man die vertraute wellenförmige Linie: erst steigt sie sanft an, erreicht ein Maximum, sinkt wieder ab, unterschreitet die Mittellage, erreicht ein Minimum, und kehrt schließlich zum Ausgangspunkt zurück. Dann beginnt alles von vorn.

Dahinter steckt eine tiefe Einsicht, die in ihrer Schlichtheit verblüfft: Eine Schwingung ist mathematisch gesehen nichts anderes als eine Drehung. Ein Pendel, das vor und zurück schwingt, entspricht der Projektion einer gleichförmigen Kreisbewegung auf eine Gerade. Das Pendel vollführt keine eigenständige Bewegung — es ist der Schatten eines Zeigers, der sich mit konstanter Winkelgeschwindigkeit im Kreis dreht. Und eine Welle, die sich im Raum fortbewegt, ist eine solche Schwingung, die ihren Ort gleichzeitig wechselt: An jedem Ort schwingt das Medium auf und ab, und die Orte, an denen das Maximum gerade herrscht, wandern mit konstanter Geschwindigkeit durch den Raum. Die Physik nennt das die harmonische Welle, und dieser Begriff ist weit mehr als ein technisches Etikett: Er sagt, dass die Welt in einer bestimmten grundlegenden Weise harmonisch ist, dass dieselbe gleichförmige Drehbewegung, die einem Zeiger auf einer Uhr entspricht, das Tiefste der physikalischen Wirklichkeit beschreibt.

6.1 Die Frequenz: wie oft pro Tick

Eine Schwingung hat zwei wesentliche Kenngrößen: die Amplitude und die Frequenz. Die Amplitude beschreibt, wie groß der Ausschlag ist, wie weit das Pendel schwingt, wie laut der Ton ist, wie hoch die Welle auftürmt. Die Frequenz beschreibt, wie schnell die Schwingung

abläuft, wie viele vollständige Hin-und-Hers pro Zeiteinheit stattfinden. Die Frequenz ist das, was unsere Ohren als Tonhöhe wahrnehmen: Der Kammerton A schwingt mit 440 vollständigen Schwingungen pro Sekunde. Rotes Licht schwingt mit etwa 430 Billionen vollständigen Schwingungen pro Sekunde. Gamma-Strahlung schwingt noch vieltausendmal schneller. Und die Gezeitenwellen des Meeres schwingen mit einer Frequenz von etwa zwei Zyklen pro Tag.

In der Sprache der Kreisbewegung heißt die Frequenz Kreisfrequenz und wird mit dem griechischen Buchstaben ω bezeichnet. Wenn ein Punkt in einer Sekunde eine volle Umdrehung zurücklegt, beträgt seine Kreisfrequenz genau 2π, weil ein voller Kreis einem Winkel von 2π Radiant entspricht. Legt der Punkt in einer Sekunde genau fünf volle Umdrehungen zurück, ist die Kreisfrequenz 10π. Dreht er sich fünfmal langsamer, so ist es $2\pi/5$.

Diese einfache Beziehung zwischen Frequenz und Winkelgeschwindigkeit ist der Schlüssel zu allem, was in diesem Teil des Buches folgt. Denn die drei Grundfrequenzen, aus denen die Geometrie des Ikosaeders eine dynamische Struktur aufbaut, sind genau:

$$\omega_1 = \frac{2\pi}{5}, \quad \omega_2 = \frac{\pi}{2}, \quad \omega_3 = \frac{4\pi}{5}.$$

Diese drei Kreisfrequenzen sind keine Zufallszahlen. Sie entstammen direkt der Geometrie des Pentagramms und der Symmetriegruppe des Ikosaeders, wie das nächste Kapitel zeigen wird. Zunächst aber noch ein paar Worte darüber, was eine Schwingung im Rahmen des Tick-Modells bedeutet und warum der Gedanke, die ganze Welt aus Schwingungen zu bauen, nicht absurd ist, sondern das Fundament der modernen Physik darstellt.

6.2 Schwingung im Takt der Zeit

Im ersten Teil dieses Buches wurde die Zeitstruktur einer zählenden Welt eingeführt: Die Zeit schreitet nicht als gleichmäßiger, unendlich

fein unterteilbarer Strom fort, sondern in diskreten Einheiten, den Ticks. Jeder Tick ist ein elementarer Schritt der Wirklichkeit, unteilbar und in diesem Sinne absolut. In einer solchen Welt hat der Begriff der Schwingung eine besonders klare Bedeutung: Eine Schwingung mit Kreisfrequenz ω dreht in jedem Tick einen Zeiger um den Winkel ω weiter. Nach einem Tick steht der Zeiger bei ω, nach zwei Ticks bei 2ω, nach k Ticks bei $k\omega$.

Eine vollständige Schwingung ist dann abgeschlossen, wenn der Zeiger genau zu seinem Ausgangspunkt zurückgekehrt ist, also wenn $k\omega$ ein ganzzahliges Vielfaches von 2π ergibt. Für die Frequenz $\omega_1 = 2\pi/5$ ist das nach fünf Ticks der Fall: $5 \cdot (2\pi/5) = 2\pi$. Für die Frequenz $\omega_2 = \pi/2$ nach vier Ticks: $4 \cdot (\pi/2) = 2\pi$. Für die Frequenz $\omega_3 = 4\pi/5$ ebenfalls nach fünf Ticks: $5 \cdot (4\pi/5) = 4\pi = 2 \cdot 2\pi$, also zwei volle Umdrehungen.

So haben die drei Schwingungen Perioden von fünf, vier und fünf Ticks. Damit wiederholen sie sich individuell nach kurzer Zeit. Aber wann wiederholen sie sich gemeinsam, als System, als Getriebe? Das ist die Frage, die das übernächste Kapitel beantwortet, und die Antwort — zwanzig Ticks — ist eine der zentralen Aussagen dieses Buches.

6.3 Das Licht als Muster von Schwingungen

Licht ist elektromagnetische Strahlung, und elektromagnetische Strahlung ist eine Schwingung elektrischer und magnetischer Felder im Vakuum des Raums. Was das Auge als Farbe wahrnimmt, ist die Frequenz dieser Schwingung: Rotes Licht schwingt langsamer als blaues, und das menschliche Auge kann nur einen winzigen Ausschnitt des gesamten elektromagnetischen Spektrums wahrnehmen. Infrarot, Ultraviolett, Röntgenstrahlung, Radiowellen, Mikrowellen — all das sind dieselbe Art von Schwingung, nur in anderen Frequenzbereichen. Ein Röntgenphoton unterscheidet sich von einem Radiophoton nicht

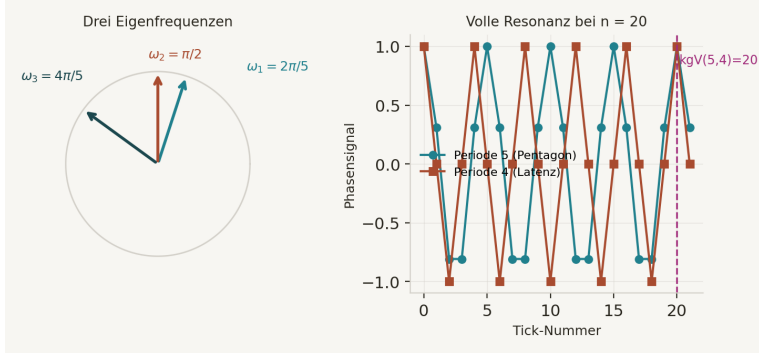

Abbildung 6.1. Tick-Resonanz: Drei Zeiger, die sich mit den Frequenzen ω_1, ω_2 und ω_3 drehen. Nach zwanzig Ticks stehen alle drei Zeiger wieder an ihrer Ausgangsposition. Jeder einzelne Zeiger kehrt früher zurück — aber erst nach zwanzig gemeinsamen Ticks ist die gesamte Konfiguration identisch mit dem Anfangszustand. Die gestrichelten Linien markieren die Positionen nach jeweils einem Tick.

in seiner Art, sondern nur in seiner Frequenz, die um einen Faktor von vielleicht einer Milliarde auseinanderliefen.

Diese Erkenntnis, dass Licht eine Welle ist, ist nicht selbstverständlich. Isaac Newton glaubte, Licht bestehe aus winzigen Teilchen, Korpuskeln, die er sich als kleine harte Kügelchen vorstellte. Christiaan Huygens vertrat im siebzehnten Jahrhundert die Wellensicht, und das Ringen zwischen diesen beiden Theorien zog sich bis ins frühe neunzehnte Jahrhundert hin, als Thomas Young mit seinem berühmten Doppelspaltexperiment eindeutig zugunsten der Wellentheorie entschied: Wenn Licht durch zwei enge Spalte fällt, zeigen die Schattenmuster auf einer Wand die charakteristischen Hell-Dunkel-Streifen der Interferenz, die nur entstehen können, wenn Wellen aus den beiden Spalten sich überlagern und gegenseitig verstärken oder auslöschen. Teilchen können das nicht, Wellen schon.

Die endgültige Synthese lieferte erst die Quantenmechanik: Licht ist gleichzeitig Welle und Teilchen. Es ist eine Welle im Sinne, dass es interferiert und beugt. Und es ist ein Teilchen, ein Photon, in

dem Sinne, dass es nur in ganzen Portionen, Quanten, mit Materie wechselwirkt. Ein Photon trägt eine bestimmte Energie, und diese Energie ist direkt proportional zur Frequenz der zugehörigen Welle. Je schneller die Schwingung, desto energiereicher das Photon. Dieses Prinzip, die Planck-Beziehung, verknüpft die Welt der Schwingungen mit der Welt der Teilchen auf eine Art und Weise, die keine andere Theorie vor der Quantenmechanik vorhersagen konnte.

6.4 Wenn die ganze Welt aus Schwingungen besteht

Was, wenn das nicht nur für Licht gilt? Was, wenn die gesamte Materie aus Schwingungen besteht, aus Anregungen von Feldern, die im Vakuum des Alls allgegenwärtig sind? Die Quantenfeldtheorie sagt genau das. Ein Elektron ist nicht ein Kügelchen, das durch den Raum fliegt. Es ist eine Anregung des Elektronenfeldes, eine lokale Störung, die sich durch das Feld ausbreitet wie eine Welle durch das Wasser. Ein Quark ist eine Anregung des zugehörigen Quarkfeldes. Das Higgs-Boson ist eine Anregung des Higgs-Feldes, das den gesamten Raum durchdringt und den Teilchen ihre Masse verleiht.

Die Welt ist, in diesem Sinne, vollständig aus Schwingungen gemacht. Und alle Schwingungen der Elementarteilchen unterscheiden sich, im gröbsten Bild, nur in ihrer Frequenz, also in ihrem Energiemaßstab, also in ihrer Masse. Denn Masse und Energie sind durch Einsteins bekannteste Formel miteinander verbunden: Die Ruheenergie eines Teilchens ist seine Masse, multipliziert mit dem Quadrat der Lichtgeschwindigkeit. Und die Energie einer Schwingung ist proportional zu ihrer Frequenz. Also entspricht die Masse eines Teilchens seiner Grundschwingungsfrequenz — je massereicher das Teilchen, desto schneller schwingt es.

Wenn das so ist, dann ist die Vielfalt der Elementarteilchen — die neun verschiedenen Quarks und Leptonen, das Higgs-Boson, die

Eichbosonen — eine Vielfalt der Frequenzen. Und die Frage, warum die Teilchen gerade die Massen haben, die sie haben, ist dann die Frage, warum die Frequenzen gerade so liegen, wie sie liegen. Das ist die Frage, auf die dieses Buch eine Antwort zu geben versucht: Die Frequenzen liegen nicht beliebig, sondern auf einem geometrisch strukturierten Raster — auf den Sprossen einer goldenen Leiter, deren Stufenweite und Gesamtarchitektur vom Ikosaeder bestimmt werden.

Man kann sich das so vorstellen: Die Welt ist ein Orchester. Jedes Elementarteilchen ist ein Instrument, das einen bestimmten Ton spielt. Das Elektron spielt eine tiefe Note, das Myon etwas höher, das Tau-Lepton noch höher. Die Quarks spielen ihre eigenen Noten, und das Higgs-Boson spielt die höchste Note, die wir kennen. Aber die Noten sind nicht willkürlich über die Tonleiter verteilt — sie liegen auf einem bestimmten Muster, einer geometrischen Tonleiter, die aus dem goldenen Schnitt gebaut ist. Und der Dirigent dieses Orchesters ist das Ikosaeder.

Eine Schwingung ist mathematisch eine Drehung mit konstanter Geschwindigkeit. Die Frequenz gibt an, welchen Winkel der Zeiger in jedem Zeitschritt zurücklegt. In der Quantenfeldtheorie ist jedes Elementarteilchen eine Anregung eines allgegenwärtigen Feldes, und seine Masse entspricht seiner Grundschwingungsfrequenz. Die drei Grundfrequenzen des Ikosaeder-Modells sind $\omega_1 = 2\pi/5$, $\omega_2 = \pi/2$ und $\omega_3 = 4\pi/5$. Sie entstammen der Geometrie des Pentagramms und der Symmetriegruppe A_5 des Ikosaeders.

KAPITEL 7

Drei Zahnräder mit unterschiedlichen Zähnezahlen

> Der Mechanismus, nach dem die Planeten sich bewegen, ist nicht verschieden von dem, nach dem eine Uhr funktioniert.
>
> René Descartes

Stellen Sie sich eine Maschine vor. Nicht eine komplizierte Maschine mit Kolben und Drähten und Sensoren, sondern die einfachste aller denkbaren Maschinen: drei Zahnräder, die ineinandergreifen. Das erste Zahnrad hat fünf Zähne, das zweite vier, das dritte wieder fünf. Die Zähnezahlen 5, 4, 5 — das ist das ganze Getriebe, nichts weiter. Und doch steckt in diesen drei kleinen Zahlen, in ihrer Herkunft und ihrem Zusammenspiel, die geometrische Architektur der Elementarteilchen.

Ein Zahnrad, das fünf Zähne hat, dreht sich in fünf Schritten einmal um seine eigene Achse. Jeder Schritt entspricht dem Einrasten eines Zahnes in die Lücke des benachbarten Rades. Wenn das erste Zahnrad mit seinen fünf Zähnen in das zweite mit seinen vier Zähnen eingreift, dreht sich das zweite nach jeweils fünf Zähnen des ersten schneller

als das erste, denn es muss weniger Zähne durchlaufen, um eine volle Umdrehung zu vollenden. Das ist das Grundprinzip jedes Getriebes: Durch die Wahl der Zähnezahlen legt man die Drehzahl-Verhältnisse fest.

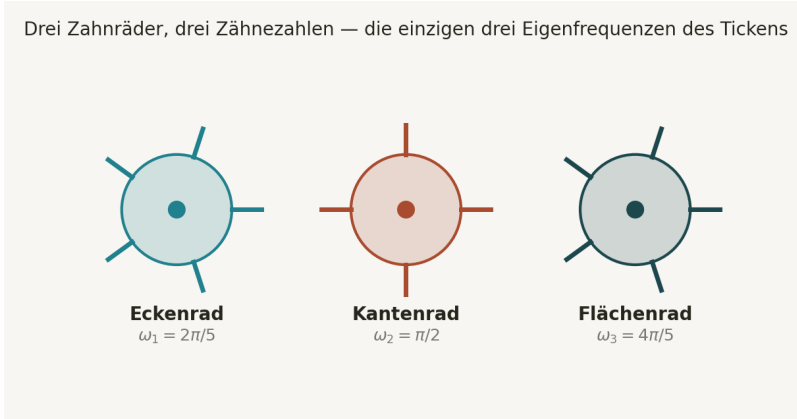

Abbildung 7.1. Drei ineinandergreifende Zahnräder mit 5, 4 und 5 Zähnen. Jeder Zahn eines Rades rastet in eine Lücke des benachbarten Rades ein. Die drei Zahnräder drehen sich mit den Kreisfrequenzen $\omega_1 = 2\pi/5$, $\omega_2 = \pi/2$ und $\omega_3 = 4\pi/5$. Das Verhältnis der äußeren zur mittleren Frequenz beträgt $8/5$ und liegt damit 1,1 % vom goldenen Schnitt φ entfernt. Die Zähnezahlen entstammen den Dimensionen der irreduziblen Darstellungen der Symmetriegruppe A_5 des Ikosaeders.

7.1 Warum gerade diese Zähnezahlen?

Die Antwort beginnt mit dem Pentagramm. Ein regelmäßiges Fünfeck hat fünf Ecken und fünf Seiten. Verbindet man alle Ecken mit allen anderen, so entsteht das Pentagramm, der fünfzackige Stern, der seit der Antike als Symbol für Harmonie und Vollkommenheit galt. Die Pythagoräer sahen in ihm das Zeichen ihrer Bruderschaft, ein geheimes Erkennungszeichen unter Eingeweihten. Mittelalterliche Alchemisten glaubten, er schütze vor bösen Geistern. Goethe ließ Mephisto durch ihn aufhalten: Der Teufel kann die Schwelle nicht überschreiten, weil

das Pentagramm an der Türe angebracht ist. Heute wissen wir, dass das Pentagramm eine tiefe geometrische Eigenschaft besitzt, die all diesen Faszinationen zugrunde liegt: Es ist das einzige reguläre Polygon, in dem die Diagonale zur Seite im Verhältnis des goldenen Schnitts steht.

Der goldene Schnitt $\varphi = 1{,}6180339887\ldots$ ist eine irrationale Zahl, die sich nicht als Bruch zweier ganzer Zahlen schreiben lässt. Er ist die Lösung der einfachsten möglichen geometrischen Proportionsaufgabe: Wie muss man eine Strecke teilen, damit das Verhältnis des Ganzen zum Größeren gleich dem Verhältnis des Größeren zum Kleineren ist? Die Antwort auf diese Frage ist der goldene Schnitt, und das Pentagramm stellt diese Proportion in jedem seiner Streckenpaare zur Schau. Die Diagonale des einbeschriebenen Fünfecks verhält sich zur Seite wie $\varphi : 1$. Die Seite verhält sich zum kleinen Abschnitt, der nach dem Schnitt durch die Kreuzungspunkte entsteht, ebenfalls wie $\varphi : 1$. Das Pentagramm ist ein einziges, über sich selbst gefaltetes goldenes Verhältnis.

Nun: Das Ikosaeder ist ein dreidimensionaler Körper mit zwanzig gleichseitigen Dreiecksflächen, zwölf Ecken und dreißig Kanten. Und das Ikosaeder ist in einem präzisen mathematischen Sinne ein dreidimensionales Pentagramm: Es enthält goldene Schnitt-Verhältnisse allenthalben in seiner inneren Struktur, und seine Symmetriegruppe A_5, die Gruppe der geraden Permutationen von fünf Elementen, hat genau 60 Elemente. Die Zahl 5, die in unseren Zahnrad-Zähnezahlen auftaucht, kommt aus dem Fünfeck und dem Pentagramm; die Frequenzen ω_1 und ω_3 haben beide den Nenner 5, weil das Pentagramm eine Fünffachsymmetrie trägt.

Die vier Zähne des mittleren Zahnrads kommen aus der Darstellungstheorie der Gruppe A_5. Diese Gruppe hat fünf irreduzible Darstellungen mit den Dimensionen 1, 3, 3, 4 und 5. Die Darstellung der Dimension 4 ist die vierdimensionale Darstellung des Ikosaeders, und sie bestimmt die mittlere Frequenz $\omega_2 = \pi/2$: Das mittlere Zahnrad dreht sich mit einer Viertel-Kreisfrequenz und braucht vier Ticks für

eine volle Umdrehung. Die Zahl vier kommt direkt aus dem Nenner der halben Kreisfrequenz, also der vierdimensionalen Darstellung.

Vier und fünf sind die beiden kleinsten Zahlen, die keine gemeinsamen Teiler haben. Das bezeichnet man in der Mathematik als teilerfremd: $\mathrm{ggt}(4, 5) = 1$. Und genau diese Teilerfremdheit macht sie zu den idealen Zähnezahlen für ein Getriebe, das möglichst lange braucht, um in seinen Ausgangszustand zurückzukehren. Wenn die Zähnezahlen einen gemeinsamen Teiler hätten, würden sich die Räder früher wieder synchronisieren. Weil sie teilerfremd sind, brauchen sie maximale Zeit, nämlich $4 \times 5 = 20$ Ticks.

7.2 Das Verhältnis der Frequenzen

Das interessanteste Verhältnis in unserem Getriebe ist jenes zwischen der schnellsten und der mittleren Frequenz. Das dritte Zahnrad dreht sich mit $\omega_3 = 4\pi/5$, das zweite mit $\omega_2 = \pi/2$. Der Quotient ist:

$$\frac{\omega_3}{\omega_2} = \frac{4\pi/5}{\pi/2} = \frac{4}{5} \cdot 2 = \frac{8}{5} = 1{,}6.$$

Der goldene Schnitt ist $\varphi = 1{,}6180339887\ldots$ Das Verhältnis $8/5 = 1{,}6$ liegt genau 1,1 % darunter. Der Unterschied zwischen $8/5$ und φ ist kein Problem, sondern ein Strukturmerkmal: Kein rationales Verhältnis kann den goldenen Schnitt exakt treffen, weil der goldene Schnitt irrational ist. Aber $8/5$ ist der beste rationale Näherungsbruch für φ mit Nenner kleiner als 8, und er entstammt der Fibonacci-Folge:

$$1,\ 1,\ 2,\ 3,\ 5,\ 8,\ 13,\ 21,\ 34,\ \ldots$$

Jedes Verhältnis aufeinanderfolgender Fibonacci-Zahlen nähert sich φ von unten und von oben abwechselnd immer weiter an. Die Zahlen 5 und 8 sind das fünfte und sechste Glied dieser Folge, und das ist kein Zufall: Das Fünfeck und das Pentagramm tragen die Fibonacci-Folge in ihrer Geometrie. Der goldene Schnitt ist der Grenzwert,

dem die Fibonacci-Verhältnisse zustreben, und $8/5$ ist der Fibonacci-Näherungsbruch, der die Periode des Getriebes am besten beschreibt.

Noch ein anderes Frequenzverhältnis verdient Aufmerksamkeit: jenes zwischen der dritten und der ersten Frequenz. Es ist:

$$\frac{\omega_3}{\omega_1} = \frac{4\pi/5}{2\pi/5} = 2.$$

Ein Verhältnis von 2:1 — das ist in der Musik die Oktave. Das dritte Zahnrad dreht sich doppelt so schnell wie das erste. Wenn die drei Zahnräder je einen musikalischen Ton spielten, so würde das dritte genau eine Oktave höher klingen als das erste. Und das mittlere würde eine reine große Terz über dem ersten liegen, denn das Verhältnis $\omega_2/\omega_1 = (\pi/2)/(2\pi/5) = 5/4$ entspricht der Frequenz der reinen großen Terz.

Ein Akkord aus Grundton, großer Terz und Oktave ist der weitgeöffnete Dur-Dreiklang, die harmonischste Verbindung in der westlichen Musik. Das Drei-Zahnrad-Getriebe spielt also, wenn man so will, einen einzigen, dauerhaft klingenden Dur-Dreiklang, einen Grundakkord, der sich nie ändert, aber auch nie verstummt.

Lesart Ingenieurin

In einem Getriebe beschreibt das Übersetzungsverhältnis, wie schnell sich ein Zahnrad dreht, wenn das andere mit einer bestimmten Drehzahl läuft. Bei Zahnrädern gilt die einfache Regel: Die Drehzahlen verhalten sich umgekehrt wie die Zähnezahlen. Ein Rad mit 5 Zähnen dreht sich doppelt so schnell wie ein Rad mit 10 Zähnen, wenn sie ineinandergreifen.
In unserem Drei-Zahnrad-System mit den Zähnezahlen 5, 4 und 5 dreht sich das mittlere Rad $5/4 = 1{,}25$ mal so schnell wie die äußeren, wenn man die erste Frequenz als Referenz nimmt. Das entspricht genau dem Frequenzverhältnis $\omega_2/\omega_1 = (\pi/2)/(2\pi/5) = 5/4$. Das Getriebe ist also konsistent: Die geometrischen Zähnezahlen erzeugen genau die physikalischen Frequenzverhältnisse.

Ingenieure kennen auch das Problem der Resonanz: Wenn ein Getriebe in einen Zustand gerät, in dem alle Räder gleichzeitig eine bestimmte kritische Phase haben, können sich kleine Fehler aufschaukeln und das Getriebe zerstören. Für unser Getriebe tritt dieser vollständige Synchronisationszustand nach zwanzig Ticks auf. Aber in der Geometrie ist das kein Schaden, sondern das Signal für einen vollständigen Zyklus: Das Getriebe hat nach zwanzig Ticks genau die Konfiguration erreicht, die es beim Start hatte, und beginnt von neuem. Resonanz als Neustart, nicht als Katastrophe.

7.3 Die Zähnezahlen und die Darstellungstheorie

Die Verbindung zwischen den Zähnezahlen und der Darstellungstheorie ist tiefer, als es zunächst scheint. In der Mathematik ist eine Darstellung einer Gruppe eine Möglichkeit, die Gruppenelemente als Matrizen zu beschreiben, die auf einen Vektorraum wirken. Die Dimension dieses Vektorraums ist die Dimension der Darstellung. Die Gruppe A_5 hat fünf irreduzible Darstellungen, und ihre Dimensionen sind genau 1, 3, 3, 4, 5. Das ist keine Willkür — es ist eine mathematische Tatsache, die sich aus der inneren Struktur der Gruppe ergibt und mit dem Satz von Burnside berechnet werden kann: Die Summe der Quadrate der Darstellungsdimensionen ist gleich der Gruppenordnung, also $1^2 + 3^2 + 3^2 + 4^2 + 5^2 = 1 + 9 + 9 + 16 + 25 = 60$.

Diese 60 ist die Ordnung von A_5, die Zahl ihrer Elemente. Und sie ist identisch mit der Anzahl der Flächensymmetrien des Ikosaeders: 60 verschiedene Drehungen bringen einen Ikosaeder in sich selbst zurück. Die Darstellungstheorie gibt uns also die Zähnezahlen 1, 3, 3, 4 und 5 als natürliche Maße der Symmetrie. Die drei Zahnräder

unseres Getriebes wählen die Dimensionen 5, 4 und 5, also die beiden äußersten Extreme des Darstellungsspektrums.

Warum die Extremdimensionen? Weil sie die stärkste Periode erzeugen. Eine Darstellung der Dimension 1 würde eine Periode von 1 erzeugen — eine Schwingung, die nach jedem Tick an ihrer Ausgangsposition ist. Eine Darstellung der Dimension 5 erzeugt eine Periode von 5, und eine Darstellung der Dimension 4 eine Periode von 4. Zusammen erzeugen sie die längstmögliche Periode, nämlich 20. Das Getriebe mit den Zähnezahlen 5, 4, 5 ist also das maximal-periodische Getriebe aus dem Darstellungsspektrum von A_5.

Lesart Musiker

In der Musik nennt man das Verhältnis zweier Frequenzen ein Intervall. Das Verhältnis $2:1$ ist die Oktave, das reinste und stärkste aller Intervalle. Das Verhältnis $3:2$ ist die reine Quinte, die nächste Stufe der harmonischen Reihe. Das Verhältnis $5:4$ ist die reine große Terz, der süße Klang, der einen Dur-Akkord charakterisiert, und der zugleich die Grenze der reinen Stimmung markiert: Jenseits der Terz wird die Berechnung reiner Intervalle schnell unhandlich.

In unserem Drei-Zahnrad-System sind alle diese Verhältnisse auf einmal präsent. Das Verhältnis $\omega_2/\omega_1 = 5/4$ ist die reine große Terz. Das Verhältnis $\omega_3/\omega_1 = 2$ ist die Oktave. Und das Verhältnis $\omega_3/\omega_2 = 8/5$ ist etwas, das die reine Stimmung nicht kennt: eine übermäßige Sexte, knapp unter der kleinen Septime, ein Intervall, das in der Praxis selten rein gespielt wird, weil es harmonisch unstabil ist. Aber in der Näherung $8/5 \approx \varphi$ ist es das goldene Intervall — eines, das sich nie ganz zu einer stabilen Harmonie schließt, weil φ irrational ist und nie auf einem Ganzton-Raster landet.

Genau das macht die Welt interessant: Das Getriebe ist fast harmonisch, fast ein reiner Dur-Dreiklang, aber nicht ganz. Der leichte Verstimmungsanteil von 1,1 % im goldenen Intervall sorgt

dafür, dass das Getriebe nie wirklich zur Ruhe kommt, nie ganz im Einklang ist, immer ein kleines bisschen weitersucht. Die Physik nennt das eine nichtlineare Resonanz.

7.4 Was das Getriebe antreibt

Ein Getriebe in einer Maschine braucht einen Antrieb: einen Motor, eine Feder, eine Gewichtskraft. Was treibt das Getriebe der Welt an? Diese Frage ist auf eine gewisse Weise unfair, weil sie voraussetzt, dass es etwas außerhalb der Welt gibt, das die Welt antreibt. Aber in einem Modell, das den Tick als elementarste Einheit der Zeit behandelt, ist der Antrieb des Getriebes einfach das Fortschreiten der Zeit selbst. Jeder Tick ist ein Zahn, der einrastet. Die Zeit dreht das Getriebe.

Diese Sichtweise hat eine seltsame Schönheit. Sie sagt, dass die Welt nicht angetrieben wird, weil etwas Energie von außen zuführt, sondern weil Zeit vergeht. Die Energie ist in der Geometrie gespeichert, in der Krümmung der Frequenzverhältnisse, in der Irrationalität des goldenen Schnitts, der dafür sorgt, dass sich die Zeiger der drei Uhren nie ganz treffen, nie vollständig überlagern, immer leicht versetzt sind, immer weiterdrehen. Die Welt ist eine Maschine, die aus dem Laufen nicht aufhören kann, weil ihre innere Geometrie kein Stillstand kennt.

Die drei Grundfrequenzen $\omega_1 = 2\pi/5$, $\omega_2 = \pi/2$ und $\omega_3 = 4\pi/5$ entsprechen Zahnrädern mit $5, 4$ und 5 Zähnen. Diese Zähnezahlen entstammen den Dimensionen der irreduziblen Darstellungen der Symmetriegruppe A_5 des Ikosaeders. Das Verhältnis der schnellsten zur mittleren Frequenz beträgt $8/5 = 1{,}6$, der beste rationale Näherungsbruch für den goldenen Schnitt φ in diesem Bereich. Das Frequenzverhältnis der äußeren Räder ist $2:1$ — eine Oktave. Das Verhältnis von mittlerem zu unterem Rad ist $5:4$ — eine reine große Terz.

KAPITEL 8

Warum sich alles erst nach 20 Schritten wiederholt

> Jede Periode beginnt mit einer Rückkehr zum Anfang — und erst dann ist der Kreis wirklich geschlossen.

In der Mathematik gibt es eine elegante Idee, die man in der Schule lernt und danach oft vergisst: das kleinste gemeinsame Vielfache, abgekürzt kgV. Das kgV zweier Zahlen ist die kleinste Zahl, die sich durch beide ohne Rest teilen lässt. Das kgV von 6 und 4 ist 12, weil 12 das erste gemeinsame Vielfache von 6 und 4 ist: $12 = 2 \cdot 6 = 3 \cdot 4$. Erst bei 12 treffen sich die Vielfachen von 6 und 4 zum ersten Mal. Vorher sind sie immer versetzt: Bei 6 steht nur das erste Zahnrad am Ausgangspunkt, bei 8 nur das zweite. Erst bei 12 ist alles synchron.

Für die Zahnrad-Perioden unseres Getriebes sind die Zahlen 5 und 4 maßgeblich: Das erste Zahnrad braucht 5 Ticks für eine Umdrehung, das zweite 4. Das kgV von 5 und 4 ist 20, weil 5 und 4 teilerfremd sind — sie haben außer 1 keinen gemeinsamen Teiler. Bei teilerfremden

Zahlen ist das kgV einfach ihr Produkt: $5 \cdot 4 = 20$. Und das dritte Zahnrad kehrt ebenfalls nach 5 Ticks zurück. Also ist 20 das kgV aller drei Perioden.

8.1 Zwanzig Ticks — die Periode des Getriebes

Nach zwanzig Ticks hat jedes der drei Zahnräder eine ganzzahlige Anzahl voller Umdrehungen absolviert: Das erste hat sich 4-mal gedreht ($20/5 = 4$), das zweite 5-mal ($20/4 = 5$), das dritte 4-mal ($20/5 = 4$). Alle drei stehen wieder in ihrer Ausgangsposition. Das Getriebe hat einen vollständigen Zyklus durchlaufen.

Man kann das auch so formulieren: Es gibt einen geometrischen Zustand des Getriebes, der alle zwanzig Ticks auftritt und nur alle zwanzig Ticks. Das ist der Zustand, in dem alle drei Zeiger gleichzeitig auf ihre jeweiligen Ausgangspositionen zeigen. Dieser Zustand ist einzigartig — er ist der einzige vollständige Synchronisationszustand des Getriebes. Er ist der Anfang und das Ende jedes Zyklus.

Was passiert danach? Es beginnt von vorn. Der zwanzigste Tick ist, für das Getriebe, identisch mit dem nullten Tick. Jeder weitere Tick wiederholt die Geschichte des Getriebes, jetzt von 20 an gezählt statt von 0. Der einundzwanzigste Tick entspricht dem ersten, der vierzigste Tick dem zwanzigsten, der einunddreißigste Tick dem elften. Das Getriebe ist periodisch mit der Periode 20, und diese Periode ist eine tiefe Eigenschaft des Systems, keine äußerliche Beschränkung.

8.2 Zwanzig und die Symmetrie des Ikosaeders

Die Zahl 20 erscheint nicht nur als kgV der Perioden, sondern auch direkt in der Geometrie des Ikosaeders. Der Ikosaeder hat zwanzig Flächen. Das ist vermutlich der auffälligste Ort, an dem 20 im Iko-

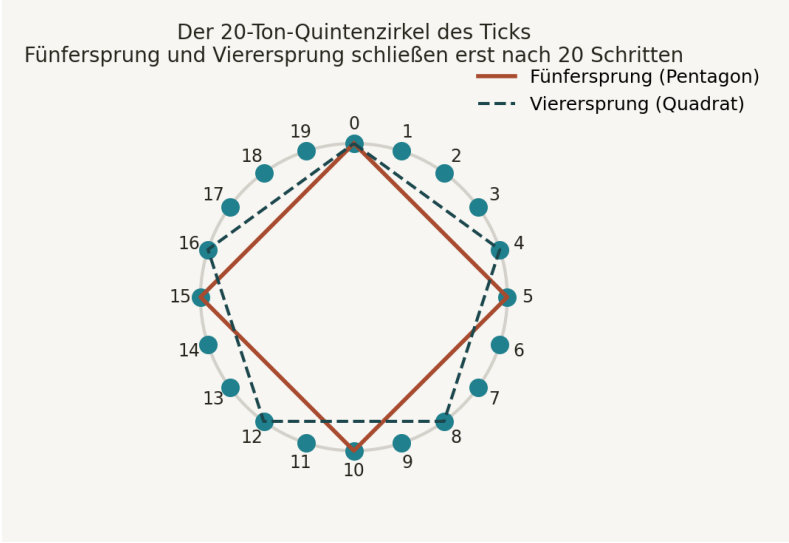

Abbildung 8.1. Der zwanzigtönige Quintenzirkel: 20 Töne, gleichmäßig auf dem Kreis verteilt, schließen sich nach einer vollen Umdrehung exakt. Im Gegensatz zum bekannten Zwölf-Ton-Quintenzirkel der Musiktheorie entsteht hier kein pythagoräisches Komma und kein ungeschlossener Rest. Der Zirkel schließt sich perfekt. Die Periodizität von 20 Ticks in der Getriebestruktur und die Periodizität des 20-Ton-Zirkels haben dieselbe Wurzel: das kleinste gemeinsame Vielfache der Zahlen 4 und 5, die aus der Symmetriegruppe des Ikosaeders stammen.

saeder erscheint — und er ist kein Zufall, sondern eine strukturelle Eigenschaft: Die zwanzig gleichseitigen Dreiecke des Ikosaeders entsprechen den zwanzig Elementen einer bestimmten Unterstruktur der Symmetriegruppe A_5.

Die Symmetriegruppe A_5 hat 60 Elemente. Und $60 = 3 \cdot 20$. Die 60 Elemente zerfallen in natürliche Blöcke, und einer dieser Blöcke hat genau 20 Elemente. Die Untergruppe der Drehungen, die eine bestimmte Achse des Ikosaeders fixieren, hat in einigen Fällen genau 20 Elemente. Diese 20-elementige Unterstruktur ist es, die sich in der Periode des Getriebes widerspiegelt.

Noch eine weitere Verbindung ist bemerkenswert: Der volle Kreis hat 360 Grad. Und $360 = 18 \cdot 20$. Das bedeutet: Wenn ein Zeiger pro Tick genau 18 Grad weiterdreht, hat er nach 20 Ticks genau 360 Grad zurückgelegt, also eine volle Umdrehung. Die Zahl 18 ist kein willkürlicher Winkel: Sie ist der Zentralwinkel eines regulären Zwanzigecks. Ein Zwanzigeck, also ein Polygon mit 20 gleichen Seiten, hat Innenwinkel von 162 Grad und Zentralwinkel von $360/20 = 18$ Grad. Das Zwanzigeck und das Getriebe mit Periode 20 gehören zur selben geometrischen Familie.

Diese Verbindung zwischen dem Kreis, der Zahl 20 und dem Getriebe ist tief. Sie sagt, dass die Geometrie des Kreises — die Geometrie des Winkels, der Drehung, der Frequenz — eine natürliche Periodizität von 20 enthält, wenn man die Zähnezahlen des Ikosaeders als Grundlage wählt.

8.3 Das pythagoräische Komma und die Unlösbarkeit des Zwölf-Ton-Zirkels

Die Musik kennt ein altes Problem. Die Quinte, das Intervall des Verhältnisses $3 : 2$, gilt in der westlichen Musiktheorie als das reinste harmonische Intervall nach der Oktave. Wenn man aus einem Grundton immer Quinten aufwärts geht und dabei gelegentlich eine Oktave nach unten korrigiert, so dass man in derselben Oktavlage bleibt, kommt man nach zwölf Quinten theoretisch wieder beim Ausgangston an. Das nennt man den Quintenzirkel.

Aber theoretisch und praktisch sind verschiedene Dinge. Sieben Oktaven entsprechen einem Frequenzverhältnis von $2^7 = 128$. Zwölf reine Quinten entsprechen einem Verhältnis von $(3/2)^{12} = 531441/4096 \approx 129{,}75$. Das ist 1,4 % mehr als 128. Der Unterschied, etwa 23 Cent in der musikalischen Einheit der Stimmungsabweichung, heißt das pythagoräische Komma. Wegen dieses Kommas schließt sich der Zwölf-

Ton-Quintenzirkel nicht exakt: Nach zwölf reinen Quinten ist man nicht beim Ausgangston, sondern ein kleines Stück daneben.

Lesart Musiker

Jeder Musiker, der je sein Instrument gestimmt hat, kennt die Frustration: Man stimmt alle Quinten so rein und schön, wie es geht, und am Ende stimmt die letzte Oktave nicht. Das pythagoräische Komma ist die unvermeidliche Konsequenz der Irrationalität — der goldene Schnitt ist irrational, und ähnliches gilt für das Verhältnis $\log_2(3/2)$, das die Quinte beschreibt. Denn wenn das Verhältnis der Quinte $3 : 2$ rational, aber das der Oktave $2 : 1$ ist, und wenn eine ganzzahlige Anzahl von Quinten nie genau eine ganzzahlige Anzahl von Oktaven ergibt, dann kann der Quintenzirkel sich nicht schließen.

Die gleichschwebende Stimmung, die in der westlichen Musik seit dem frühen achtzehnten Jahrhundert verbreitet ist und in Bachs Wohltemperiertem Klavier gefeiert wird, löst das Problem durch Kompromiss: Alle Quinten werden ein kleines Stück kleiner gemacht, etwa 2 Cent für jede Quinte, so dass zwölf leicht verstimmte Quinten nach oben genau sieben Oktaven ergeben. Das Komma wird gleichmäßig auf alle zwölf Quinten verteilt und damit unsichtbar gemacht.

Ein Zwanzig-Ton-Quintenzirkel würde dieses Problem auf andere Weise lösen: Wenn man nicht zwölf, sondern zwanzig Töne auf dem Kreis platziert und die Schritte zwischen ihnen entsprechend anpasst, lässt sich ein System konstruieren, das sich nach zwanzig Schritten exakt schließt. Das ist keine Erfindung dieses Buches — Musiktheoretiker haben solche Systeme studiert. Aber die Verbindung zur Getriebe-Periode 20 ist ein Geschenk der Geometrie: Das $\mathrm{kgV}(4,5) = 20$ ergibt die Periode des Getriebes und die Periodizität des Quintenzirkels aus derselben Quelle.

8.4 Die zeitliche Architektur der Welt

Was bedeutet es für die Physik, dass die Welt eine Periode von zwanzig Ticks hat? Es bedeutet, dass der vollständige geometrische Zustand des Grundgetriebes nach zwanzig Ticks identisch ist mit dem Anfangszustand. Alles, was danach geschieht, ist eine Wiederholung von etwas, das schon stattgefunden hat. Die Welt hat ein Gedächtnis, und dieses Gedächtnis reicht genau zwanzig Ticks zurück.

Natürlich ist die Wirklichkeit komplexer als drei Zahnräder. Es gibt nicht nur drei Frequenzen, sondern die gesamte reiche Struktur der Teilchenphysik mit ihren zwölf Fermionen, vier Wechselwirkungen, dem Higgs-Feld und allem, was dazugehört. Aber die drei Grundfrequenzen sind die Quelle, aus der sich alle anderen Frequenzen durch harmonische Überlagerung zusammensetzen. Und wenn die Grundfrequenzen eine Periode von 20 haben, haben auch alle ihre Harmonischen Perioden, die Vielfache oder Teiler von 20 sind.

Die Grundperiode des Getriebes ist also keine Eigenschaft eines besonderen Modells oder einer besonderen Näherung. Sie ist eine mathematische Konsequenz der Zähnezahlen 5 und 4, die ihrerseits geometrische Konsequenzen der Symmetriegruppe A_5 sind. Die zeitliche Architektur der Welt ist in die Geometrie ihrer Symmetriegruppe eingeschrieben.

Das kleinste gemeinsame Vielfache der Perioden 5 und 4 ist 20. Erst nach zwanzig Ticks kehrt das gesamte Drei-Zahnrad-Getriebe in seinen Anfangszustand zurück. Die Zahl 20 erscheint auch in der Geometrie des Ikosaeders als die Anzahl seiner Flächen. Ferner gilt: $360 = 18 \cdot 20$, sodass eine Drehung um 18 Grad pro Tick nach genau 20 Ticks eine volle Umdrehung ergibt. Der zwanzigtönige Quintenzirkel schließt sich exakt, weil $\mathrm{kgV}(4{,}5) = 20$ ist und kein pythagoräisches Komma auftritt.

KAPITEL 9

Sommerfelds Rätsel: die magische 137

> Wenn ich sterbe, ist die erste Frage, die ich Gott stellen werde: Was hat es mit der Zahl 137 auf sich?
>
> Wolfgang Pauli, zugeschrieben

Im Jahr 1916 veröffentlichte Arnold Sommerfeld in den Annalen der Physik eine Arbeit, die die Physik für Jahrzehnte beschäftigen sollte. Er hatte die Bahn-Quantisierung des Wasserstoffatoms um eine entscheidende Verfeinerung erweitert: Niels Bohr hatte 1913 das erste halbwegs erfolgreiche Modell des Wasserstoffatoms vorgelegt, in dem Elektronen nur auf bestimmten kreisförmigen Bahnen laufen durften, auf Bahnen, deren Drehimpuls ein ganzzahliges Vielfaches des Planckschen Wirkungsquantums ist. Bohrs Modell erklärte die Spektrallinien des Wasserstoffs in guter Näherung, aber es hatte eine Schwäche: Die Spektrallinien erschienen in hoher Auflösung nicht als einzelne, scharfe Linien, sondern als enge Dubletts, als feine Aufspaltungen, die Bohrs Modell nicht vorhersagen konnte.

Sommerfeld beseitigte diese Schwäche, indem er den Elektronen nicht nur kreisförmige, sondern auch elliptische Bahnen erlaubte und die spezielle Relativitätstheorie einbezog. Bei elliptischen Bahnen sind verschiedene Ellipsen mit derselben großen Halbachse möglich, und die Relativitätstheorie bewirkt, dass diese Bahnen leicht unterschiedliche Energien haben — weil das Elektron auf einer sehr schmalen Ellipse nahe dem Kern schneller ist und damit relativistisch schwerer. Diese feinen Energieunterschiede entsprechen den beobachteten Aufspaltungen. Das Modell funktionierte.

In Sommerfelds Formel für diese Feinstruktur-Aufspaltungen tauchte eine merkwürdige dimensionslose Zahl auf, eine Zahl, die weder von den Einheiten noch von den Koordinaten abhing, eine reine Zahl, die man aus dem Verhältnis bestimmter Fundamentalkonstanten berechnen konnte. Sommerfeld bezeichnete sie mit α und berechnete ihren Wert zu etwa 1/137. Diese Zahl, die Feinstrukturkonstante, ist seitdem eine der meist diskutierten und am wenigsten verstandenen Zahlen der gesamten Physik.

9.1 Was die Feinstrukturkonstante beschreibt

Die Feinstrukturkonstante α ist ein Maß für die Stärke der elektromagnetischen Wechselwirkung, der Kraft, die Elektronen an Atomkerne bindet, die für Licht, für chemische Bindungen, für das Leuchten von Glühbirnen und das Sehen von Farben verantwortlich ist. Man kann ihren Wert so interpretieren: Wenn zwei Elektronen sich auf einem bestimmten Abstand begegnen, ist die Wahrscheinlichkeit, dass sie ein Photon austauschen — also elektromagnetisch wechselwirken —, ungefähr proportional zu α. Wäre α zehnmal größer, würde die Elektromagnetik zehnmal stärker sein, Atome wären kleiner, chemische Bindungen stärker, Materiestukturen stabiler, aber auch starrer. Wäre α zehnmal kleiner, wären Atome riesig, chemische Reaktionen träge,

und das Leben, so wie wir es kennen, wäre in kaum einem der Szenarien möglich.

Der Wert $\alpha \approx 1/137$ ist also einer jener Zufälle, die gar kein Zufall sein können, weil sie die Welt erst möglich machen. Er muss einen Grund haben. Und genau deshalb haben Physiker über ein Jahrhundert lang versucht, ihn zu verstehen: Warum ist die Feinstrukturkonstante genau dieser Wert und nicht ein anderer? Ist er rein zufällig, eine Frage der Anfangsbedingungen des Universums? Ist er durch eine tieferliegende Theorie festgelegt? Und wenn ja, durch welche?

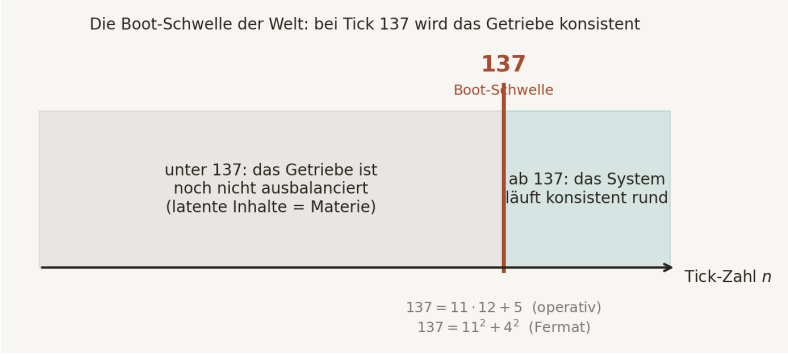

Abbildung 9.1. Die Türschwelle 137: Schematische Darstellung der Beziehung $137 = 11 \cdot 12 + 5$. Das 11×12-Raster beschreibt die geometrische Grundstruktur: 11 entspricht der ersten Klasse-A-Primzahl (der Vorgängerzahl der Eckenanzahl des Ikosaeders), und 12 ist die Anzahl der Ecken des Ikosaeders. Die 5 verbleibenden Einheiten entsprechen der fünfdimensionalen Darstellung von A_5, der skalaren Schublade. Gleichzeitig ist $137 = 11^2 + 4^2$, die eindeutige Fermat-Zwei-Quadrat-Zerlegung dieser Primzahl.

9.2 Klasse-A-Primzahlen und die Struktur von 137

Um die Zerlegung $137 = 11 \cdot 12 + 5$ zu verstehen, muss man wissen, was Klasse-A-Primzahlen sind. Im Rahmen des geometrischen Modells heißen bestimmte Primzahlen Klasse-A-Primzahlen, wenn sie in einem

besonderen Verhältnis zu den Charakteristika des Ikosaeders stehen. Die wichtigsten sind:

- $11 = V - 1$, wobei $V = 12$ die Anzahl der Ecken (Vertices) des Ikosaeders ist.
- $19 = F - 1$, wobei $F = 20$ die Anzahl der Flächen (Faces) des Ikosaeders ist.
- $59 = |A_5| - 1 = 60 - 1$, die Vorgängerzahl der Gruppenordnung.

Diese drei Zahlen sind Primzahlen, und sie entstehen als die Zahl-um-eins-kleiner-als eine natürliche geometrische Kenngröße des Ikosaeders. Die Zahl 11 ist die erste und kleinste dieser Klasse-A-Primzahlen, und sie spielt die Hauptrolle in der Zerlegung von 137.

Die Zerlegung $137 = 11 \cdot 12 + 5$ liest sich so: Im 11-er-Raster, also in einer Welt, die ihre Schritte nach 11 zählt, ist 137 das erste Ziel, das über das volle 12-er-Raster des Ikosaeders (also über $11 \times 12 = 132$) hinausgeht und noch fünf weitere Schritte tut. Die 5 ist die Dimension der größten irreduziblen Darstellung von A_5, die skalare Schublade des Ikosaeders. Die Feinstrukturkonstante ist also, geometrisch gelesen, der Übergang über die Schwelle des vollen ikosaedrigen Rasters in die fünfdimensionale skalare Darstellung.

9.3 Die Fermat-Zerlegung von 137

Es gibt eine zweite, unabhängige geometrische Charakterisierung von 137. Die Zahl 137 ist eine Primzahl, und sie erfüllt die Bedingung, dass sie beim Teilen durch 4 den Rest 1 ergibt: $137 = 34 \cdot 4 + 1$. Für Primzahlen mit dieser Eigenschaft gilt ein berühmter Satz des Mathematikers Pierre de Fermat aus dem siebzehnten Jahrhundert: Jede solche Primzahl lässt sich auf genau eine Weise als Summe zweier Quadratzahlen schreiben.

Für 137 ist diese eindeutige Zerlegung:

$$137 = 121 + 16 = 11^2 + 4^2.$$

Die Bausteine sind 11 und 4. Die Zahl 11 ist die erste Klasse-A-Primzahl, und die Zahl 4 ist der Nenner der mittleren Kreisfrequenz $\omega_2 = \pi/2$. Dass diese beiden Zahlen zusammen 137 ergeben, folgt aus der Primzahltheorie automatisch — es ist die eindeutige Fermat-Zerlegung. Und doch fügt sich diese Zerlegung nahtlos in die geometrische Struktur des Modells ein: Die beiden Bausteine der Primzahl 137 sind genau die beiden Zahlen, die im Getriebe die entscheidende Rolle spielen.

9.4 Die Konstante K1 und die geometrische Stufe

Im geometrischen Modell gibt es eine Größe, die als K_1 bezeichnet wird:

$$K_1 = \frac{16}{137 \cdot 3} = \frac{16}{411} \approx 0{,}038929.$$

Diese Zahl ist die geometrische Stufe, die zur Feinstrukturkonstante führt. Der Zähler 16 ist 4^2, das Quadrat des Nenners von ω_2, also das Quadrat der Zahl, die in der Fermat-Zerlegung als kleinerer Baustein von 137 auftaucht. Der Nenner enthält 137 als die Feinstruktur-Zahl selbst und 3, die kleinste Dimension einer nicht-trivialen irreduziblen Darstellung von A_5.

Die Größe K_1 beschreibt in anschaulicher Sprache, wie groß ein geometrischer Schritt auf der Frequenzleiter des Ikosaeders ist, wenn man ihn in Einheiten der Feinstrukturkonstante misst. Sie ist die Brücke zwischen der diskreten Geometrie der Zahnrad-Frequenzen und dem kontinuierlichen Fließen der elektromagnetischen Kopplung. Genauer wird dieser Zusammenhang in den späteren Teilen des Buches, wenn es um die Massen der Quarks und Leptonen geht.

Für jetzt genügt die folgende Einsicht: Die Zahl 137 ist nicht die willkürliche Konstante eines freien Parameters. Sie ist eine Schwelle, die in der Geometrie des Ikosaeders kodiert ist. Sie lässt sich auf zwei unabhängige Weisen aus geometrischen Grundzahlen aufbauen — durch das $11 \times 12 + 5$-Raster und durch die Fermat-Zerlegung $11^2 + 4^2$. Beide Wege führen zur selben Zahl, weil beide Wege die Geometrie desselben Körpers beschreiben.

Die Feinstrukturkonstante $\alpha \approx 1/137$ ist ein Maß für die Stärke der elektromagnetischen Kraft. Im geometrischen Modell gilt $137 = 11 \times 12 + 5$: 11 ist die erste Klasse-A-Primzahl $(V - 1)$, 12 die Eckenzahl des Ikosaeders, 5 die Dimension der größten Darstellung von A_5. Außerdem gilt $137 = 11^2 + 4^2$ als eindeutige Fermat-Zwei-Quadrat-Zerlegung, wobei 4 der Nenner von ω_2 ist. Die geometrische Stufe der Feinstruktur ist $K_1 = 16/(137 \cdot 3) \approx 0{,}038929$.

KAPITEL 10

Der goldene Schnitt als Treppe

> Eine Treppe, die ins Unendliche führt und doch immer in demselben Verhältnis gemessen wird — das ist der goldene Schnitt.

Der goldene Schnitt erscheint in diesem Buch an vielen Stellen: in der Geometrie des Pentagramms, im Verhältnis der Zahnrad-Frequenzen, in der langen Geschichte der Numerologie. Es ist höchste Zeit, diese Zahl etwas genauer zu betrachten und zu verstehen, warum sie in so vielen verschiedenen Zusammenhängen auftaucht — und warum ihre Funktion als Treppe nicht nur ein schönes Bild, sondern eine präzise mathematische Struktur ist.

Der goldene Schnitt $\varphi = 1{,}6180339887\ldots$ hat eine algebraische Eigenschaft, die ihn von fast allen anderen Zahlen unterscheidet: Er ist die Lösung der Gleichung $\varphi^2 = \varphi + 1$. Das bedeutet: Das Quadrat des goldenen Schnitts ist gleich dem goldenen Schnitt selbst plus Eins. Wer

nicht an Algebra gewöhnt ist, kann sich das so vorstellen: Wenn man ein Rechteck zeichnet, dessen Seiten im Verhältnis $\varphi : 1$ stehen, und dann ein Quadrat mit Seitenlänge 1 abschneidet, bleibt ein Rechteck übrig, das wieder im goldenen Verhältnis steht — nur kleiner. Das Rechteck ist selbstähnlich: Es enthält sich selbst, in kleinerem Maßstab, als Teilfigur. Diese Selbstähnlichkeit ist der geometrische Kern der Gleichung $\varphi^2 = \varphi + 1$.

Die Selbstähnlichkeit hat eine unmittelbare Konsequenz: Der goldene Schnitt ist die einzige positive Zahl, für die gilt, dass das Quadrat um 1 größer als die Zahl selbst ist und gleichzeitig der Kehrwert um 1 kleiner:

$$\varphi - \frac{1}{\varphi} = 1.$$

Das macht φ zu einem natürlichen Maßstab für Skalierungen: Wenn man eine Größe mit φ multipliziert, springt man eine Stufe auf der goldenen Treppe nach oben. Wenn man durch φ dividiert, also mit dem Kehrwert $1/\varphi = \varphi - 1 \approx 0{,}618$ multipliziert, geht man eine Stufe nach unten.

10.1 Logarithmen als Stufen

Um zu verstehen, was es bedeutet, den goldenen Schnitt als Treppe zu benutzen, muss man sich kurz mit Logarithmen vertraut machen. Ein Logarithmus beantwortet die Frage: Wie oft muss man eine Zahl mit sich selbst multiplizieren, um eine andere Zahl zu erhalten? Der Logarithmus von 100 zur Basis 10 ist 2, weil $10^2 = 100$. Der Logarithmus von 1000 zur Basis 10 ist 3. Der Logarithmus von $\sqrt{10}$ zur Basis 10 ist $1/2$, weil man die Basis ein halbes Mal mit sich multipliziert. Das ergibt eine kontinuierliche Skala: Statt der Zahlen 1, 10, 100, 1000 arbeitet man mit den Exponentenwerten 0, 1, 2, 3.

Die goldene Treppe funktioniert genau so, nur mit φ als Basis. Der Logarithmus einer Größe x zur Basis φ, also $\log_\varphi(x)$, gibt an, auf welcher Stufe der goldenen Treppe x liegt. Ein Schritt nach oben

entspricht einem Faktor $\varphi \approx 1{,}618$. Zwei Schritte einem Faktor $\varphi^2 = \varphi + 1 \approx 2{,}618$. Zehn Schritte einem Faktor $\varphi^{10} \approx 122{,}99$. Zwanzig Schritte einem Faktor von fast 15 130. Die Treppe wächst exponentiell, wie alle logarithmischen Skalen.

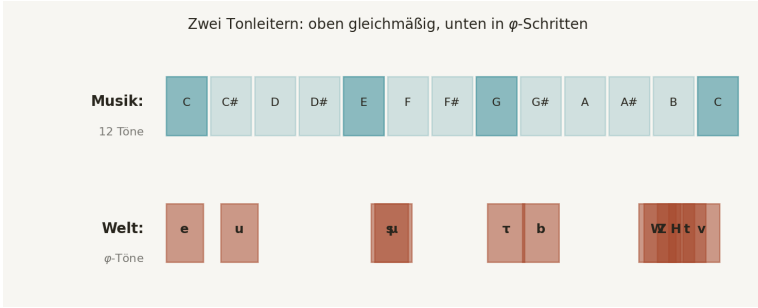

Abbildung 10.1. Der goldene Schnitt als musikalische Leiter: Auf der horizontalen Achse die Stufen der goldenen Treppe, auf der vertikalen Achse die zugehörigen Frequenzen oder Massen. Jede Stufe ist um den Faktor φ größer als die vorherige. Die eingetragenen Positionen zeigen, wo die bekannten Elementarteilchenmassen auf dieser Leiter liegen. Wie auf einer Tonleiter liegen sie nicht auf beliebigen Positionen, sondern auf rationalen Bruchteilen der Stufenabstände, bestimmt durch die Arithmetik der Gruppe A_5.

10.2 Die Higgs-Skala als Erdgeschoss

In der Teilchenphysik gibt es eine ausgezeichnete Energieskala: die Higgs-Skala, die Energie, bei der das Higgs-Feld seinen Vakuumerwartungswert annimmt. Dieser Wert beträgt $v = 246{,}22\,\text{GeV}$. GeV ist die Abkürzung für Giga-Elektronenvolt, die natürliche Energieeinheit der Teilchenphysik, bei der Energien und Massen — dank Einsteins Formel — in denselben Einheiten gemessen werden. Das Higgs-Boson selbst hat eine Masse von 125,11 GeV, etwa halb so viel wie der Vakuumerwartungswert.

Im Bild der goldenen Treppe ist die Higgs-Skala das Erdgeschoss, die Stufe Nummer Null. Das ist eine Wahl, keine geometrische Notwendig-

keit — aber es ist die natürlichste Wahl, weil der Vakuumerwartungswert die Skala vorgibt, unterhalb derer die Elementarteilchenmassen liegen. Alle Teilchenmassen werden dann als Stufen unterhalb des Erdgeschosses gemessen: Der goldene Logarithmus von m/v, wobei m die Masse des Teilchens und $v = 246{,}22\,\mathrm{GeV}$ die Higgs-Skala ist, gibt die Stufenzahl an.

Das Top-Quark, das schwerste bekannte Elementarteilchen mit einer Masse von $172{,}57\,\mathrm{GeV}$, liegt nahe am Erdgeschoss: sein Logarithmus $\log_\varphi(m_t/v)$ ist eine kleine negative Zahl. Das Bottom-Quark liegt einige Stufen darunter, das Tau-Lepton noch etwas tiefer. Das Charm-Quark ist schon merklich schwächer, das Myon leichter noch. Das Elektron liegt weit unten, mehr als zwanzig goldene Stufen unterhalb der Higgs-Skala. Zwischen dem schwersten bekannten Teilchen und dem leichtesten bekannten geladenen Lepton liegen fast vierzig goldene Stufen — ein enormer Maßstabsunterschied, der im goldenen Logarithmus aber klar geordnet und strukturiert erscheint.

Lesart Buchhalter

Wer mit Zinsrechnung vertraut ist, kennt die Kraft des exponentiellen Wachstums. Ein Kapital, das jedes Jahr um 10% wächst, verdoppelt sich in etwa sieben Jahren. Nach vierzehn Jahren ist es viermal so groß. Der Zins definiert eine logarithmische Skala, auf der jede Stufe dasselbe relative Wachstum bedeutet, während die absoluten Beträge immer schneller wachsen.

Die goldene Treppe funktioniert genauso, nur dass der „Zins“ keine Prozentzahl ist, sondern der goldene Schnitt $\varphi \approx 1{,}618$ — ein Anstieg von gut 61,8% pro Stufe. Jede Stufe nach oben bedeutet eine Multiplikation mit φ, jede Stufe nach unten eine Division durch φ. Die Massen der Elementarteilchen sind die Guthaben auf verschiedenen Konten dieser goldenen Bank: Das Top-Quark hat fast das Grundkapital v, und das Elektron hat ein Konto, das fast neunzehn Stufen Zinsansammlung unter dem Grundkapital liegt.

Das Besondere ist, dass die Abstände zwischen aufeinanderfolgenden Stufen in absoluten Einheiten nicht gleich sind, aber in relativem Sinne identisch. Das Top-Quark und das Bottom-Quark unterscheiden sich um einen Faktor von etwa 40 in ihrer Masse. Das Charm-Quark und das Strange-Quark unterscheiden sich um einen ähnlichen relativen Faktor. Auf der goldenen Leiter ist dieser relative Abstand immer der gleiche, weil der goldene Schnitt ihn konstant hält. Das ist die Stärke eines logarithmischen Maßstabs: Er macht das Verborgene sichtbar, indem er die relativen Abstände gleich erscheinen lässt.

10.3 Rationale Stufen und die Massen der Elementarteilchen

Die Massen der Elementarteilchen liegen nicht auf ganzzahligen Stufen der goldenen Treppe. Das wäre zu einfach und auch falsch. Sie liegen auf rationalen Stufen, auf Stufen mit gebrochenen Zahlen als Exponent. Genauer gesagt: auf Stufen, deren Exponent ein Vielfaches von $1/15$ oder $1/3$ ist. Diese Brüche entstammen der Darstellungstheorie von A_5 und den rationalen Kombinationen ihrer Charaktere.

Als Beispiel: Für das Charm-Quark gilt:

$$m_c = m_t \cdot \varphi^{-51/5},$$

wobei der Exponent $-51/5 = -10{,}2$ ein rationaler Bruch ist, der zeigt, dass das Charm-Quark auf der Stufe $-10{,}2$ der goldenen Treppe liegt, relativ zum Top-Quark gemessen. Dieser Bruch $51/5$ ist kein freier Parameter, der angepasst wird, bis er passt. Er ergibt sich aus der Gruppentheorie von A_5 auf eine Weise, die in Teil 4 ausgeführt wird. Hier genügt die Feststellung, dass die Stufen nicht beliebig sind, sondern einem Muster folgen, das in der Symmetriegruppe kodiert ist.

Ähnliche Formeln gelten für alle anderen Quarks und Leptonen. Das Bottom-Quark: $m_b = v \cdot \varphi^{-127/15}$. Das Strange-Quark: $m_s = v \cdot \varphi^{-246/15}$. Das Tau-Lepton: $m_\tau = v \cdot \varphi^{-154/15}$. Das Myon: $m_\mu = v \cdot \varphi^{-242/15}$. Das Elektron: $m_e = v \cdot \varphi^{-408/15}$. All diese Exponenten sind rationale Zahlen mit dem Nenner 15, und der Nenner 15 ist das kleinste gemeinsame Vielfache der charakteristischen Nenner 3 und 5 der Gruppe A_5. Das ist kein Zufall — es ist die arithmetische Signatur der Gruppe, ausgedrückt in den Stufen der goldenen Leiter.

10.4 Die goldene Treppe als Vorgriff auf Teil 4

Die goldene Treppe ist das Herzstück von Teil 4 dieses Buches, wo die Massen aller Elementarteilchen als Stufen dieser Leiter präsentiert und mit den experimentellen Messwerten verglichen werden. Hier, in Teil 2, dient die goldene Treppe als Brücke: Sie verbindet die dynamische Geometrie des Getriebes aus drei Zahnrädern mit der statischen Geometrie der Teilchenmassen.

Das Getriebe läuft mit seinen drei Frequenzen. Und die Frequenzen, also die Massen, liegen auf der goldenen Treppe. Die Architektur der Zeit und die Architektur der Masse sind zwei Gesichter derselben geometrischen Struktur. Das eine ist dynamisch, das andere statisch. Das eine ist ein Getriebe, das andere eine Leiter. Aber beide sind aus denselben Zahlen gebaut, aus 4 und 5 und φ, aus der Symmetriegruppe A_5 und aus dem Ikosaeder.

Der goldene Schnitt $\varphi = 1{,}6180\ldots$ definiert eine logarithmische Treppe. Jede Stufe entspricht einem Multiplikationsfaktor φ. Die Massen der Elementarteilchen liegen auf rationalen Stufen dieser Treppe, wobei die Stufenzahlen Vielfache von 1/15 oder 1/3 sind. Das Erdgeschoss ist die Higgs-Skala $v = 246{,}22\,\text{GeV}$. Das

schwerste bekannte Teilchen, das Top-Quark, liegt nahe dem Erdgeschoss. Das Elektron liegt mehr als zwanzig goldene Stufen darunter. Die Stufen sind kein freier Parameter, sondern folgen aus der Darstellungstheorie der Gruppe A_5.

KAPITEL 11

Wie Sommerfeld, Pauli, Eddington an 137 verzweifelten

> Es ist das größte verfluchte Geheimnis der Physik: eine magische Zahl, die kein Mensch versteht.
>
> Richard Feynman, *QED*, 1985

Die Geschichte der Feinstrukturkonstante ist eine Geschichte des Scheiterns — aber eines produktiven Scheiterns, das die Physik immer tiefer in die Grundlagen der Materie geführt hat. Kein anderes einzelnes Thema in der Physik hat so viele große Geister so nachhaltig beschäftigt und frustriert wie die Frage: Warum ist $\alpha \approx 1/137$? Und warum gibt es keine Theorie, die diesen Wert herleitet, obwohl wir den Wert auf elf Nachkommastellen kennen?

Es ist seltsam. In der modernen Physik gibt es kaum etwas, das so genau gemessen ist wie α. Und gleichzeitig gibt es nichts, das so wenig verstanden ist. Die Standardtheorie der Elementarteilchen, das

Standardmodell, kann mit α als Eingabewert Vorhersagen machen, die mit dem Experiment bis auf zehn oder mehr Nachkommastellen übereinstimmen. Aber das Modell kann nicht erklären, warum α diesen bestimmten Wert hat. Es ist, als würde man wissen, wie eine Musikkapelle klingt, wenn man ihr einen bestimmten Ton vorgibt — aber man weiß nicht, warum der Ton gerade so hoch ist.

11.1 Sommerfeld in München: eine Schule und ihr Rätsel

Arnold Sommerfeld war eine der beherrschenden Figuren der deutschen Physik in der ersten Hälfte des zwanzigsten Jahrhunderts. In seiner Münchener Schule am Lehrstuhl für theoretische Physik der Universität München, die er von 1906 bis zu seiner Emeritierung leitete, bildete er eine ganze Generation von Physikern aus: Werner Heisenberg, Wolfgang Pauli, Peter Debye, Hans Bethe, Rudolf Peierls — sie alle gingen durch Sommerfelds Seminar, bevor sie selbst zu Größen wurden. Sommerfeld war kein Genie des einsamen Gedankenblitzes, sondern ein außerordentlicher Lehrer und ein Meister des systematischen Denkens. Er hatte das seltene Talent, die richtigen Fragen zu stellen, auch wenn er die Antworten noch nicht kannte.

Als Sommerfeld 1916 die Feinstrukturkonstante einführte, war er sofort fasziniert von ihrer Dimensionslosigkeit. Alle anderen Naturkonstanten, die Lichtgeschwindigkeit c, das Plancksche Wirkungsquantum h, die Elementarladung e, tragen physikalische Einheiten. Sie sind je nach Wahl des Einheitensystems verschieden groß: Wählt man andere Längen- und Zeiteinheiten, ändert sich c. Aber α ist anders: Es ist eine reine Zahl, unabhängig von jeder Wahl der Einheiten, ein absolutes Charakteristikum der Natur. Niemand kann α durch Wahl eines anderen Maßsystems in eine einfachere Zahl verwandeln.

Sommerfeld war überzeugt, dass dieser dimensionslosen Zahl eine tiefe Bedeutung zukommen musste. In seinen Vorlesungen und Briefen

kehrte die Feinstrukturkonstante immer wieder als offene Frage auf. In seinen späten Jahren, schon im Ruhestand, versuchte er verschiedene Wege, den Wert 1/137 aus tieferen Prinzipien herzuleiten. Er schlug Formeln vor, prüfte Zusammenhänge mit der Kreiszahl und der Exponentialfunktion, suchte nach strukturellen Verbindungen zur Quantenmechanik. Keiner seiner Versuche hielt der Überprüfung stand. Sommerfeld starb 1951, ohne die Frage beantwortet zu haben. Die Feinstrukturkonstante blieb sein Lebensrätsel.

11.2 Pauli und die Zimmer-Nummer Hundertdreiunddreißig

Wolfgang Pauli war einer der scharfsinnigsten und zugleich unbequemsten Physiker des zwanzigsten Jahrhunderts. Er war bekannt für seine vernichtenden Urteile über unzulängliche Arbeiten. Sein Ausspruch „Das ist nicht einmal falsch“ ist legendär: Er meinte damit eine Theorie, die so vage formuliert ist, dass man sie gar nicht widerlegen kann — und eine unwiderlegbare Theorie ist für Pauli wertloser als eine nachweislich falsche, weil sie gar nichts sagt. Für Pauli war intellektuelle Präzision eine moralische Forderung, an sich selbst genauso wie an andere.

Und dennoch ließ die Zahl 137 auch Pauli nicht los. Er widmete ihr über Jahrzehnte Gedanken, Notizen, Gespräche und Briefe. Es existieren Briefe, in denen Pauli über die Feinstrukturkonstante nachdenkt und dabei ungewohnt spekulativ klingt, als wäre die Zahl ein Spiegel, in dem er die Grenzen seines eigenen Verstehens sah. Der Briefwechsel mit Carl Gustav Jung, dem Psychologen, zeigt einen Pauli, der nicht nur Physiker, sondern auch philosophischer Denker war: Für ihn war 137 nicht nur ein physikalisches Problem, sondern eine Art Schlüssel zu Fragen, die über die Physik hinausgehen.

Die bekannteste Geschichte ist die folgende, und ob sie wahr ist, lässt sich heute nicht mehr sicher sagen: Als Pauli 1958 im Zürcher

Rotkreuz-Krankenhaus in Behandlung lag, erkannte er die Nummer seines Zimmers: Es war Zimmer 137. Er soll gesagt haben: „Das ist ein schlechtes Zeichen." Tatsächlich starb Pauli wenige Tage später, am 15. Dezember 1958. Ob Zimmer 137 seine letzte Station war, ist von verschiedenen Zeitzeugen unterschiedlich überliefert. Aber die Geschichte lebt in der Physiker-Gemeinschaft fort, weil sie so bezeichnend ist für die Rolle, die diese Zahl in Paulis Leben spielte.

Gesichert ist, dass Pauli in seinem letzten Lebensjahrzehnt mehrfach den Wunsch äußerte, Gott nach dem Grund für $\alpha = 1/137$ zu fragen. Das ist apokryph, aber es ist eine Art intellektuelles Testament, das die tiefe Frustration eines der klügsten Köpfe der Physik zum Ausdruck bringt: Er hatte sein ganzes Leben damit verbracht, die Struktur der Materie zu verstehen, und am Ende blieb eine einzige dimensionslose Zahl unerklärt.

11.3 Eddingtons kühner Irrtum

Arthur Stanley Eddington war ein Astrophysiker von Weltrang: Er hatte 1919 bei einer Expedition nach Príncipe und Sobral die Ablenkung des Lichts durch die Sonne während einer Sonnenfinsternis gemessen und damit Einsteins allgemeine Relativitätstheorie eindrucksvoll bestätigt. Die Schlagzeile im Londoner Times lautete: „Revolution der Wissenschaft — Newtons Ideen verworfen." Eddington war über Nacht berühmt geworden, nicht wegen einer eigenen Entdeckung, sondern wegen seiner Beobachtung, die eine Entdeckung anderer bestätigte.

In den 1920er und 1930er Jahren entwickelte Eddington ein ehrgeiziges Programm: Er glaubte, dass alle Naturkonstanten aus reinen mathematischen und logischen Überlegungen, ohne Experimente, hergeleitet werden könnten. Er nannte dieses Programm Fundamentaltheorie. Für die Feinstrukturkonstante schlug er eine Formel vor, die er aus kombinatorischen Überlegungen über die Anzahl der möglichen

Zustände eines Elektrons in einem relativistischen Weltraum ableitete. Sein Ergebnis war zunächst $1/\alpha = 136$.

Als spätere Messungen den Wert auf $1/\alpha = 137$ präzisierten, revidierte Eddington seine Überlegungen. Er erklärte, man müsse einen bisher übersehenen Freiheitsgrad berücksichtigen, und dann ergebe seine Formel doch 137. Dieses nachträgliche Anpassen der Theorie an den gemessenen Wert wurde von seinen Kollegen mit Skepsis aufgenommen. In der Wissenschaft nennt man das Retrofitting — man passt eine Theorie im Nachhinein an Beobachtungen an, statt Vorhersagen zu machen, die dann überprüft werden können.

Eddingtons Formel $137 = 16 \cdot 17/2$ ist eine Dreieckszahl-Darstellung: Die n-te Dreieckszahl ist $n(n+1)/2$. Für $n = 16$ ergibt das 136, für eine geänderte Zählung 137. Die Arithmetik ist korrekt, aber warum sollte die Feinstrukturkonstante gerade die 16. Dreieckszahl sein? Eddington gab keine überzeugende Begründung. Pauli, der für seine direkte Art bekannt war, soll Eddingtons Arbeit als „Unsinn“ bezeichnet haben, obwohl er selbst nie eine bessere Erklärung lieferte. Eddington starb 1944, ohne seine Fundamentaltheorie abschließen zu können.

11.4 Heisenbergs Irritation und der Briefwechsel mit Pauli

Werner Heisenberg, der Schöpfer der Matrizenmechanik und des Unschärfeprinzips, war ein weiterer Gigant der Physik, den die Feinstrukturkonstante beschäftigte. Heisenberg war in Sommerfelds Seminar in München ausgebildet worden und hatte dort den etwas älteren Pauli kennengelernt; die beiden verband eine jahrzehntelange intellektuelle Freundschaft, die sich in Tausenden von Briefen niederschlug. Die Heisenberg-Pauli-Korrespondenz ist eines der großen Dokumente der modernen Physikgeschichte, ein Dialog zweier außerordentlicher Köpfe, die sich gegenseitig herausforderten und antrieben.

In den 1950er und frühen 1960er Jahren arbeiteten Heisenberg und Pauli an einer unitären Feldtheorie, einem großangelegten Versuch, alle Elementarteilchen aus einer einzigen nichtlinearen Feldgleichung herzuleiten. Dieses Programm war äußerst ehrgeizig: Es sollte nicht nur die Teilchen beschreiben, sondern auch ihre Wechselwirkungen, ihre Massen und — wenn möglich — die Feinstrukturkonstante. Die Arbeit war intensiv und frustrierend. Pauli starb 1958, bevor das Programm abgeschlossen war. Heisenberg setzte es noch eine Weile fort, aber ohne Paulis Schärfe und Kritik fehlte dem Unternehmen die entscheidende Dynamik.

In einem späten Gespräch soll Heisenberg gesagt haben, die zwei wirklich offenen Probleme der Physik seien die Feinstrukturkonstante und die Einheit des Fundamentalen, und er habe auf das zweite mehr Hoffnung als auf das erste. Diese Einschätzung ist bezeichnend: Heisenberg glaubte, das Warum hinter α sei tiefer als die Einheitlichkeit der Kräfte. Es war kein technisches Problem, das man durch mehr Rechnen lösen könnte. Es war eine konzeptuelle Frage, die eine neue Art des Denkens verlangte.

11.5 Bohr und das staunende Schweigen

Niels Bohr, der Gründer der Kopenhagener Deutung der Quantenmechanik und einer der zentralen Architekten des modernen Atommodells, stand der Frage nach der Feinstrukturkonstante auf eine andere Weise gegenüber. Bohr war kein Mann der Formeln und Zahlenspiele; er war ein Denker der Prinzipien, der Bedeutungen, der Fragen hinter den Fragen. Für ihn war das Problem nicht, ob man 137 aus einer Formel herleiten konnte, sondern ob man verstand, warum es eine einzige Zahl sein sollte, die die gesamte elektromagnetische Wechselwirkung charakterisiert.

In seinem Briefwechsel mit Sommerfeld findet sich eine Stelle, an der Bohr schreibt: Die Feinstrukturkonstante zeigt uns, dass das Atom

mehr Geheimnisse hat, als wir dachten. Die Zahl ist ein Hinweis, kein Ergebnis. Wir sehen sie, aber wir verstehen sie noch nicht. Dieses staunende Schweigen — die Bereitschaft, ein Rätsel als Rätsel zu belassen, statt es mit falschen Antworten zu füllen — war ein Markenzeichen Bohrs. Er vermutete, dass die Auflösung des Rätsels ein fundamentales Umdenken erfordern würde, vergleichbar mit dem Umdenken, das zur Quantenmechanik selbst geführt hatte.

11.6 Der Stand heute und der Ausblick

Heute, im frühen einundzwanzigsten Jahrhundert, ist die Feinstrukturkonstante auf mehr als elf Stellen genau gemessen:

$$\frac{1}{\alpha} = 137{,}035\,999\,084\ldots$$

Diese Messung, aus hochpräzisen Experimenten mit dem anomalen magnetischen Moment des Elektrons, ist eine der präzisesten Messungen in der gesamten Naturwissenschaft. Und dennoch: Niemand weiß, warum diese Zahl genau so ist. Die Quantenelektrodynamik, die erfolgreichste physikalische Theorie aller Zeiten in Bezug auf Vorhersagegenauigkeit, macht mit α als Eingabe Vorhersagen, die auf zehn und mehr Stellen mit dem Experiment übereinstimmen. Aber sie erklärt den Wert nicht. α bleibt ein freier Parameter — eine Zahl, die man messen und einsetzen muss, ohne zu wissen, warum.

Theorien der großen Vereinheitlichung versuchen, die drei nichtgravitativen Wechselwirkungen — die elektromagnetische, die schwache und die starke Kernkraft — auf eine einzige Wechselwirkung bei hohen Energien zurückzuführen. Bei dieser Vereinigung könnten die Kopplungsstärken durch die Geometrie der Vereinheitslichungsgruppe bestimmt werden, und dann wäre α kein freier Parameter mehr. Bislang haben solche Theorien den gemessenen Wert von α nicht exakt reproduziert.

Die Stringtheorie hat weitere Möglichkeiten eröffnet: In der Stringtheorie gibt es prinzipiell keine freien Parameter — alle Kopplungsstärken und Massen folgen aus der Geometrie des Kompaktifizierungsraums. Aber die Vielfalt der möglichen Kompaktifizierungen ist so groß, dass die Stringtheorie bisher keine einzige Vorhersage für α gemacht hat, die sich überprüfen ließe.

Lesart Philosoph

Die Geschichte der Feinstrukturkonstante zeigt, wie untrennbar Physik und Philosophie in den Grundlagenfragen verbunden sind. Sommerfeld, Pauli, Eddington, Heisenberg — sie alle fragten nicht nur, was α ist, sondern auch, was es bedeutet, eine Zahl zu erklären. Ist eine Zahl erklärt, wenn man sie aus anderen Zahlen ableiten kann? Oder muss die Ableitung auch verständlich sein, muss sie eine Einsicht vermitteln, nicht nur eine Formel liefern? Eddingtons Scheitern ist lehrreich. Er hatte eine Formel, die rechnerisch den richtigen Wert lieferte — aber sie überzeugte niemanden, weil sie keine Einsicht vermittelte. Es war eine Beschreibung, keine Erklärung. Der Unterschied zwischen Beschreibung und Erklärung ist in der Physik oft schwer zu ziehen, aber er ist real. Eine Erklärung zeigt, warum die Zahl gerade so ist und nicht anders, stellt die Verbindung zu einer tieferen Struktur her, macht das Zufällige notwendig.

Das geometrische Modell versucht, genau das zu leisten: Es zeigt, dass 137 keine willkürliche Konstante ist, sondern eine Schwelle, die in der Geometrie des Ikosaeders kodiert ist, hergeleitet auf zwei unabhängigen Wegen durch $11 \times 12 + 5$ und durch $11^2 + 4^2$. Ob das die vollständige Erklärung ist oder nur ein erster Schritt, bleibt offen. Aber es ist eine Verbindung, die existiert und die überprüft werden kann.

11.7 Die Konstante und die Konstanten-Sucher

Man sollte nicht verschweigen, dass die Suche nach Erklärungen für α über die Jahrzehnte auch eine Schattenseite hatte. Die Faszination der Zahl 137 hat viele angezogen, die weniger an Physik als an Numerologie interessiert waren: an der Kunst, durch geschicktes Rechnen mit bekannten Konstanten beliebige Zahlen herzustellen. Man kann fast jede Zahl als Kombination von π, e, Quadratwurzeln und einfachen Rechenoperationen darstellen, wenn man genug Freiheiten hat. Das ist keine Physik, das ist Arithmetik.

Der Unterschied zwischen echten physikalischen Zusammenhängen und numerologischen Spielereien liegt nicht in der Komplexität der Formeln, sondern in ihrer Vorhersagekraft. Eine echte Erklärung macht Vorhersagen: Sie sagt nicht nur, warum α genau diesen Wert hat, sondern auch, was passiert, wenn man die Theorie auf andere Größen anwendet. Das geometrische Modell, das in diesem Buch entwickelt wird, macht solche Vorhersagen — für die Massen der Quarks und Leptonen, für die Mischungswinkel, für die Massenhierarchien. Diese Vorhersagen sind überprüfbar und werden in Teil 5 explizit aufgeführt.

11.8 Warum die Frage immer noch offen ist

Es bleibt eine merkwürdige Tatsache der Physikgeschichte: Keine andere dimensionslose Konstante hat so viel Aufmerksamkeit auf sich gezogen wie α. Die Gravitationskonstante ist ebenfalls ein freier Parameter, und das Verhältnis der Gravitationskraft zur elektromagnetischen Kraft ist eine dimensionslose Zahl von kolossaler Größe, etwa 10^{40}. Aber diese Zahl hat nie die Faszination von $1/137$ erzeugt.

Warum? Weil 137 klein genug ist, um greifbar zu sein. Weil sie eine Primzahl ist. Weil sie nahe an anderen interessanten Zahlen liegt ($136 = 8 \cdot 17$, $138 = 2 \cdot 3 \cdot 23$). Weil sie in einem Bereich liegt, in dem

Kombinationen aus kleinen ganzen Zahlen noch vernünftig aussehen. Weil sie die Lücke zwischen dem Machbaren und dem Verstandenen so deutlich markiert.

Die Antwort des geometrischen Modells lautet: Diese Faszination war berechtigt. Die Zahl 137 ist tatsächlich strukturiert, tatsächlich geometrisch kodiert. Die Kombinationen $11 \cdot 12 + 5$ und $11^2 + 4^2$ sind nicht zufällig schön — sie folgen aus der Geometrie des Ikosaeders. Und wenn das stimmt, dann war die Intuition von Sommerfeld, Pauli, Bohr und Heisenberg richtig: α ist erklärbar. Nur die Erklärung war noch nicht gefunden.

Die Feinstrukturkonstante $\alpha \approx 1/137$ wurde 1916 von Arnold Sommerfeld eingeführt. Pauli, Eddington, Heisenberg und viele andere haben versucht, ihren Wert aus tieferen Prinzipien herzuleiten — keiner hat es abschließend geschafft. Heute ist α auf elf Stellen genau gemessen: $1/\alpha = 137{,}035\,999\ldots$. Im geometrischen Modell entsteht 137 aus der Struktur des Ikosaeders durch zwei unabhängige Wege: $137 = 11 \cdot 12 + 5$ (Raster aus Klasse-A-Primzahl und Eckenanzahl plus skalare Darstellung) und $137 = 11^2 + 4^2$ (eindeutige Fermat-Zwei-Quadrat-Zerlegung). Die geometrische Brücke zur Feinstruktur ist die Konstante $K_1 = 16/(137 \cdot 3)$.

Teil III

Warum es Materie geben muss

KAPITEL 12

Eine Uhr, die nicht aufgeht

Es gibt eine alte Frage, die Physiker seit einem Jahrhundert beschäftigt, ohne dass sie wirklich zufrieden gestellt wurde: Warum existiert überhaupt Materie? Nicht: Warum hat Materie diese oder jene Masse. Sondern die radikalere Frage: Warum gibt es etwas statt nichts, warum blieb nach dem Urknall überhaupt etwas übrig, das sich zu Atomen, zu Sternen, zu uns fügen konnte? Die Standardantwort der Kosmologie lautet, dass im Urknall geringfügig mehr Materie als Antimaterie entstand und die Überbleibsel das sind, was wir heute Welt nennen. Aber diese Antwort verschiebt das Problem nur: Warum war es ein Überbleibsel und kein sauberes Nichts?

In diesem Kapitel nähern wir uns der Frage von einer unerwarteten Seite. Wir fragen nicht nach einem mysteriösen Anfangszustand, der per Hand eingestellt wurde. Wir fragen stattdessen: Gibt es in der Geometrie selbst einen Mechanismus, der zwingend einen Rest erzeugt? Einen Mechanismus, der so unausweichlich ist wie die Tatsache, dass

sich Zahnräder mit verschiedenen Zähnezahlen nicht immer sauber schließen?

12.1 Das pythagoreische Komma der Physik

Wer Klavier spielt, kennt das Problem, auch wenn er es vielleicht nicht beim Namen nennt: Das Klavier lügt. Nicht absichtlich, aber es lügt. Wenn man zwölf reine Quinten aneinanderreiht — jede ein Frequenzverhältnis von drei zu zwei — dann müsste man nach zwölf Schritten wieder genau sieben Oktaven höher ankommen. Sieben Oktaven entsprechen einem Frequenzverhältnis von exakt 128. Zwölf Quinten ergeben aber einen Wert von etwa 129,75. Die Differenz, ein winziger Überschuss, heißt das pythagoreische Komma. Die Klavierstimmer der letzten Jahrhunderte haben daraus eine eigene Kunst gemacht: Sie verteilen diesen Rest gleichmäßig auf alle Töne, sodass das Klavier in keiner Tonart perfekt, aber in jeder Tonart spielbar ist.

Die Physik kennt eine analoge Situation, nur dass hier nicht Tonhöhen aufeinandertreffen, sondern Drehrhythmen.

Kehren wir zu den drei Zahnrädern zurück, die wir im zweiten Teil dieses Buches eingeführt haben. Das erste Rad dreht sich mit der Frequenz omega-eins gleich 2 pi durch fünf, das zweite mit omega-zwei gleich pi durch zwei, das dritte mit omega-drei gleich 4 pi durch fünf. Diese drei Frequenzen sind nicht voneinander unabhängig gewählt; sie entstammen der Geometrie des Ikosaeders, genauer gesagt den drei natürlichen Periodizitäten, die ein Körper mit fünffacher Symmetrieachse zwangsläufig besitzt. Wir haben gezeigt, dass sich diese drei Räder nach zwanzig Ticks zum ersten Mal fast vollständig schließen — fast, aber nicht ganz.

Das Verhältnis omega-drei zu omega-zwei beträgt acht zu fünf, also 1,6. Der goldene Schnitt hingegen beträgt 1,6180.... Die Abweichung ist 1,1 Prozent. Eine winzige Diskrepanz. Und genau diese Diskrepanz ist nicht wegzureden. Sie ist keine Messungenauigkeit, kein Rundungs-

fehler. Sie ist strukturell. Die Geometrie des Ikosaeders zwingt die drei Räder dazu, sich nach 20 Ticks um einen kleinen Winkel zu verfehlen.

> Wenn drei geometrisch erzwungene Rhythmen zusammenlaufen, erzeugen sie bei jedem Schluss einen unvermeidlichen Rest. Dieser Rest ist nicht das Ergebnis eines Fehlers — er ist das Ergebnis der Geometrie selbst.

12.2 Die Uhr, die nicht aufgeht

Stellen wir uns eine alte mechanische Uhr vor, die aus drei ineinandergreifenden Zahnrädern besteht. Das erste Rad hat fünf Zähne, das zweite hat vier Zähne, das dritte hat fünf Zähne. Jedes Mal, wenn ein Zahn des ersten Rads einen Zahn des zweiten Rads schiebt, dreht sich das zweite Rad um eine bestimmte Menge. Und das zweite Rad schiebt das dritte.

Nun fragt man: Wann sind alle drei Räder gleichzeitig an einem definierten Ausgangspunkt? Die Antwort ist das kleinste gemeinsame Vielfache der Zähnezahlen: $\mathrm{kgV}(5, 4, 5) = 20$. Nach 20 Ticks hat das erste Rad vier volle Umdrehungen gemacht, das mittlere Rad fünf, das dritte Rad vier. Soweit, so ordentlich.

Aber die Räder dieser Uhr sind nicht aus Metall. Sie sind aus Geometrie. Und Geometrie lässt sich nicht so einfach in ganze Zahlen pressen, wie ein Uhrmacher seine Zähnezahlen festlegt. Das Verhältnis der dritten zur zweiten Frequenz ist acht zu fünf. Das ist nahe am goldenen Schnitt, aber nicht identisch mit ihm. Der goldene Schnitt ist irrational — er lässt sich nicht als Bruch ganzer Zahlen schreiben. Und weil die Ikosaeder-Geometrie den goldenen Schnitt in ihrem Herzen trägt, kann sie auch keine perfekte ganzzahlige Schließung erzwingen.

Was passiert dann nach 20 Ticks? Die drei Zeiger der Uhr zeigen fast auf denselben Strich — aber nicht ganz. Es bleibt ein Phasenfehler.

Dieser Phasenfehler ist klein: etwa 1,1 Prozent einer vollen Umdrehung. Er ist winzig, aber er ist da.

Und dieser Phasenfehler, so die Kernthese dieses Teils des Buches, ist das, was wir Materie nennen.

12.3 Materie als Bilanzunterschied

Um zu verstehen, wie ein geometrischer Phasenfehler zur Materie werden kann, brauchen wir eine andere Denkweise — die Denkweise eines Buchhalters. Ein Buchhalter schaut nicht auf einzelne Transaktionen. Er schaut auf die Bilanz: Was kommt herein, was geht heraus, was bleibt? Wenn Einnahmen und Ausgaben sich nicht decken, gibt es einen Saldo. Dieser Saldo ist nicht Zufall; er folgt aus den Bewegungen, die vorher stattgefunden haben.

In der Physik bedeutet dies: Wenn ein Prozess beginnt und endet, und wenn die anfänglichen und abschließenden Bedingungen nicht identisch sind, dann gibt es einen Rest. Bei unserem Uhrenmodell: Der Beginn ist der Ausgangszustand der drei Zeiger; das Ende ist ihr Zustand nach 20 Ticks. Wenn die Zeiger nach 20 Ticks exakt dieselbe Position wie am Anfang hätten, wäre die Bilanz ausgeglichen. Die Welt würde zu demselben Zustand zurückkehren, aus dem sie startete. Es gäbe keinen dauerhaften Rest, keinen Unterschied, keine Asymmetrie — und folglich keine Materie.

Weil aber die Geometrie eine exakte Rückkehr verhindert, bleibt ein Phasenfehler zurück. Dieser Phasenfehler ist der offene Posten der Welt. Er muss irgendwo untergebracht werden. Er kann nicht einfach verschwinden, weil er aus einer Erhaltungsgröße folgt: der Phasenerhaltung der drei Rhythmen. Und dieser unauflösliche Rest zeigt sich als das, was wir in Experimenten als Materie beobachten.

Lesart Buchhalter

Stellen wir uns vor, ein Unternehmen macht jedes Jahr eine Bilanz. Es erwartet, dass alle Posten sich ausgleichen — Soll und Haben, Einnahmen und Ausgaben. Aber es gibt eine Besonderheit: Der Wechselkurs zwischen zwei Währungen folgt keinem rationalen Verhältnis. Er ist irrational. Dadurch entsteht bei jedem Abschluss ein kleiner Saldo, der nicht wegzurechnen ist. Der Buchhalter, der die Jahresabschlüsse mehrerer Jahrzehnte prüft, stellt fest: Dieser Saldo ist kein Fehler. Er ist ein strukturelles Merkmal des Systems. Die Bilanz kann nicht ausgeglichen sein, weil die ihr zugrunde liegenden Wechselkurse es nicht erlauben. Materie ist dieser persistente Jahresabschluss-Saldo der Welt.

Das Schöne an dieser Sichtweise ist, dass sie keine willkürlichen Anfangsbedingungen erfordert. Man muss nicht behaupten, dass im Urknall aus undurchsichtigen Gründen mehr Materie als Antimaterie erzeugt wurde. Stattdessen folgt die Asymmetrie direkt aus der Geometrie: Die Zahnräder können nicht schließen, also gibt es Materie. Der Rest ist unvermeidlich.

12.4 Zwanzig Ticks und 360 Möglichkeiten

Schauen wir genauer auf die Zahl 20. Wir haben gesehen, dass $\mathrm{kgV}(5, 4) = 20$. Und wir haben gesehen, dass der Ikosaeder 20 Dreiecksflächen besitzt. Das ist kein Zufall: Die Zahl 20 ist die natürliche Periodizität der Ikosaeder-Geometrie. Es ist die kleinste Zahl, bei der alle drei Rhythmen des Ikosaeders gleichzeitig einen vollen Zyklus abgeschlossen haben — oder es hätten, wenn die Geometrie perfekt rational wäre.

Nun: 20 Ticks bei einem vollen Kreis von 360 Grad. Das bedeutet, dass nach 20 Ticks die Welt um 360 Grad, also um eine volle Umdrehung fortgeschritten sein müsste. Und das tut sie — mit dem

kleinen Vorbehalt des Phasenfehlers. Was in dieser Rechnung als Rest erscheint, ist geometrisch begründet und physikalisch real.

Interessanterweise ist 360 das Produkt 18 mal 20. Die 18 hat in der Gruppentheorie eine besondere Bedeutung: Die Ordnung der Untergruppe, die die fünffache Symmetrieachse des Ikosaeders stabilisiert, ist 10 — und 360 durch 20 ist genau 18. Diese Zahlen sind nicht willkürlich; sie reflektieren die innere Struktur der Symmetriegruppe, die dem Ikosaeder entspricht, nämlich der alternierenden Gruppe A5 mit 60 Elementen.

Der Rest nach 20 Ticks lässt sich mit den drei Tick-Frequenzen präzise ausrechnen. Er entspricht einem Phasenunterschied, der wiederum mit dem Verhältnis des goldenen Schnitts zu seinem ganzzahligen Näherungswert 8 zu 5 zusammenhängt. Die Näherung ist gut: $8/5 = 1{,}6$, während der goldene Schnitt $1{,}6180\ldots$ beträgt. Der Unterschied — etwas mehr als ein Prozent — ist der Keim des Phasenfehlers, der bei jedem Durchgang durch die 20-Tick-Periode bleibt.

Was macht diese Periodizität so besonders? Es gibt, wenn man darüber nachdenkt, sehr viele mögliche Periodizitäten. Eine Uhr aus zwei Rädern mit 6 und 4 Zähnen hätte eine Periodizität von 12 Ticks. Eine Uhr mit 7 und 5 Zähnen hätte eine Periodizität von 35. Nur die Kombination 5 und 4 — aus der Ikosaeder-Geometrie ableitbar — ergibt 20. Und 20 ist besonders kompakt: Es ist kleiner als die meisten anderen Kombinationen ähnlicher Größe. Kompakte Periodizitäten sind energetisch bevorzugt; sie brauchen weniger ‚Anlaufzeit' um Fehler sichtbar zu machen.

Die Falsifikationsvorhersage F12 des Modells lautet: Der 360-Tick-Schluss ist periodisch und präzise. Wenn man 18 vollständige 20-Tick-Zyklen beobachtet — also 360 Ticks insgesamt — dann sollte die kumulative Phasenabweichung einen bestimmten Wert haben, der sich berechnen lässt. Diese Voraussage ist testbar, wenn man die Theorie mit Präzisionsmessungen der Higgs-Kopplung oder der Top-

Quark-Masse verbindet, die beide direkt mit den Tick-Frequenzen zusammenhängen.

12.5 Warum Materie persistiert

Man könnte einwenden: Gut, es gibt einen Rest. Aber warum bleibt dieser Rest? Warum löst er sich nicht einfach auf? Die Antwort liegt in der Struktur der Symmetriegruppe selbst.

Die Gruppe A5, die Symmetriegruppe des Ikosaeders, ist einfach — im mathematischen Sinne. Eine einfache Gruppe hat keine echten Normalteiler außer der trivialen Untergruppe und sich selbst. Das bedeutet, sie lässt sich nicht in kleinere, unabhängige Teile zerlegen. Sie ist unteilbar. Was auch immer in einer unteilbaren Symmetriestruktur als Rest anfällt, kann nicht durch eine interne Umverteilung aufgelöst werden. Der Rest bleibt.

Und dieser unauflösliche Rest ist Materie. Stabil, persistent, nicht wegredbar. Genau das beobachten wir: Materie zerfällt nicht einfach ins Nichts. Das Proton ist stabil — nach aktuellem Experimentalstand hat es eine Lebensdauer von mehr als 10 hoch 34 Jahren. Elektronen sind nach allem, was wir wissen, absolut stabil. Materie bleibt, weil die Geometrie, aus der sie folgt, keine Abkürzung anbietet.

> Materie ist kein Zufall des Urknalls. Sie ist der unausweichliche Phasenfehler einer unteilbaren Symmetriestruktur. Die Ikosaeder-Geometrie erlaubt keine exakte Schließung der drei Grundrhythmen — also muss Materie entstehen und muss sie dauerhaft existieren.

Mit diesem Verständnis können wir nun fragen: Welche Formen nimmt dieser Rest an? Wie viele verschiedene Arten von Resten gibt es? Das führt uns zur nächsten Frage, die das Herz von Teil 3 ist: Wie viele Schubladen stellt die Geometrie bereit?

KAPITEL 13

Die fünf Schubladen des Ikosaeders

Stellen wir uns eine Bibliothek vor. In ihr stehen alle Objekte, die es in der Welt geben kann — alle Teilchen, alle Kräfte, alle Wechselwirkungen. Nicht in einer langen, willkürlichen Liste, sondern in Schubladen geordnet. Jede Schublade fasst genau die Objekte, die strukturell zusammengehören. Die Bibliothekarin — die Geometrie — hat diese Schubladen nicht willkürlich angelegt. Die Anzahl der Schubladen, ihre Größe, ihre Kapazität: Das alles folgt aus der zugrundeliegenden Symmetrie.

Für die Welt des Ikosaeders beantwortet die Mathematik die Frage nach der Bibliothek sehr präzise. Die Symmetriegruppe A5 — die Gruppe aller Drehungen, die einen Ikosaeder auf sich selbst abbilden — hat genau fünf irreduzible Darstellungen. Fünf Schubladen, und nicht mehr, und nicht weniger.

13.1 Was eine irreduzible Darstellung ist

Bevor wir die fünf Schubladen füllen, müssen wir verstehen, was eine irreduzible Darstellung überhaupt ist. Das klingt nach Hochmathematik, ist aber im Kern eine sehr einfache Idee.

Wenn eine Symmetriegruppe auf etwas wirkt — auf Teilchen, auf Wellenfunktionen, auf abstrakte Objekte — dann kann man fragen: Was ist die kleinste unteilbare Einheit, auf die die Gruppe wirkt? Kann man das Objekt in zwei unabhängige Teile zerlegen, die die Gruppe getrennt rotiert? Wenn ja, waren es eigentlich zwei Objekte, keine eins. Die kleinste unteilbare Einheit nennt man irreduzible Darstellung.

Man kann sich das so vorstellen: Eine Gruppe ist wie ein Satz von Spiegeln. Ein Objekt, das man in die Mitte dieser Spiegel stellt, wird auf bestimmte Weise abgebildet. Wenn das Objekt einfach genug ist, kann man es nicht mehr sinnvoll teilen, ohne die Spiegelsymmetrie zu zerstören. Es ist dann irreduzibel — es gehört unlösbar zusammen.

Für die Gruppe A5 gibt es genau fünf solcher unteilbaren Grundtypen. Sie haben Dimensionen 1, 3, 3', 4 und 5. Das bedeutet: Die einfachste irreduzible Darstellung lebt in einem eindimensionalen Raum; sie ist ein Skalar, der bei jeder Symmetrietransformation einfach bestehen bleibt. Die nächsten beiden leben in dreidimensionalen Räumen: drei Objekte, die die Gruppe als Einheit dreht und mischt. Die vierte lebt in einem vierdimensionalen Raum, die fünfte in einem fünfdimensionalen.

13.2 Die Quadratsumme und ihre Bedeutung

In der Mathematik gibt es einen fundamentalen Satz: Die Summe der Quadrate der Dimensionen aller irreduziblen Darstellungen einer endlichen Gruppe ist gleich der Gruppenordnung. Für A5 heißt das:

$$1^2 + 3^2 + 3^2 + 4^2 + 5^2 = 1 + 9 + 9 + 16 + 25 = 60$$

Und 60 ist genau die Ordnung der Gruppe A5 — die Anzahl ihrer Elemente, also die Anzahl der verschiedenen Drehungen des Ikosaeders. Diese Gleichung ist mehr als eine Rechenübung. Sie sagt: Die fünf Schubladen füllen gemeinsam exakt den Raum, den die Gruppe bereitstellt. Nichts fehlt, nichts ist zu viel. Die fünf Schubladen erschöpfen die Geometrie vollständig.

Die Gleichung $1 + 9 + 9 + 16 + 25 = 60$ ist das Grundinventar der Wirklichkeit. Fünf Schubladen, deren Quadratsumme genau die Ordnung der Symmetriegruppe des Ikosaeders ergibt. Alle Objekte der Welt müssen in eine dieser fünf Schubladen passen.

13.3 Die erste Schublade: der Skalar

Die erste Schublade ist eindimensional. Sie enthält Objekte, die bei allen Symmetrietransformationen unverändert bleiben. Egal welche Drehung des Ikosaeders man anwendet — das, was in dieser Schublade liegt, ist immer dasselbe. Es ist gleichmäßig, allgegenwärtig, ohne Richtung und ohne Unterschied.

In der Physik nennt man solche Objekte Skalare. Sie haben keine innere Richtung, keinen Spin, keine Farbladung. Sie sind das Einfachste, was es geben kann.

Das Objekt, das in diese Schublade passt, ist das Higgs-Boson. Das Higgs-Feld ist ein skalares Feld — es durchdringt den Raum gleichmäßig, ohne Vorzugsrichtung. Es ist der Mechanismus, durch den Elementarteilchen ihre Masse erwerben. In unserem Modell ist das Higgs die erste und einfachste Schublade der A5-Geometrie. Dieser Befund ist nicht willkürlich: Die Masse des Higgs-Bosons, experimentell bei 125,11 GeV gemessen, hängt eng mit dem goldenen Schnitt und der Vakuumerwartungswert-Energie von 246,22 GeV zusammen.

13.4 Die zweite und dritte Schublade: die Drei-Generationen

Die zweite und dritte Schublade sind beide dreidimensional. Sie enthalten jeweils drei Objekte, die die A5-Geometrie als Einheit behandelt — als unteilbares Dreierpaket.

Dieses Dreierpaket ist genau das, was wir als drei Generationen der Elementarteilchen kennen. Die erste Generation enthält das Elektron, das Elektron-Neutrino, das up-Quark und das down-Quark. Die zweite Generation enthält das Myon, das Myon-Neutrino, das charm-Quark und das strange-Quark. Die dritte Generation enthält das Tau-Lepton, das Tau-Neutrino, das top-Quark und das bottom-Quark. Diese Zuordnung ist so vertraut geworden, dass man leicht übersieht, wie erstaunlich sie ist: Drei nahezu identische Kopien desselben Grundmusters, jeweils mit verschiedenen Massen ausgestattet.

Warum gibt es genau drei Generationen? Weil die Geometrie zwei dreidimensionale Schubladen anbietet: eine für Materie, eine für Antimaterie. Innerhalb dieser Schubladen passt eine Drei — nicht mehr, nicht weniger. Die Antwort auf eine der rätselhaftesten Fragen der Physik lautet also: Es gibt drei Generationen, weil A5 genau zwei dreidimensionale Darstellungen besitzt, und jede fasst genau drei Objekte.

Der Unterschied zwischen 3 und 3' — zwischen der zweiten und der dritten Schublade — ist eine mathematische Spiegelung, die wir im nächsten Kapitel ausführlich behandeln werden. Diese Spiegelung entspricht der Unterscheidung zwischen Materie und Antimaterie.

Es lohnt sich, kurz innezuhalten und die Reichweite dieser Aussage zu ermessen. Im Standardmodell der Teilchenphysik sind die drei Generationen ein empirisches Datum — man hat sie gemessen und in die Theorie eingebaut, ohne dass die Theorie einen Grund nennen könnte. Die Frage ‚Warum drei?' wird im Standardmodell nicht beantwortet. Hier dagegen ist die Antwort strukturell und zwingend: Die Zahl drei ist die Dimension der einzigen dreidimensionalen irre-

duziblen Darstellung von A5. Es ist die einzig mögliche Dimension in diesem Schubladentyp. Und weil beide verfügbaren dreidimensionalen Schubladen von der Materie-Antimaterie-Paarung belegt sind, gibt es keine weiteren.

13.5 Die vierte Schublade: vier Dimensionen, vier Kräfte

Die vierte Schublade ist vierdimensional. Vier Objekte bilden hier eine unlösbare Einheit.

In der Physik entspricht diese viergliedrige Einheit dem elektroschwachen Sektor des Standardmodells. Dieser Sektor umfasst vier Trägerteilchen: das W-plus-Boson, das W-minus-Boson, das Z-Boson und das Photon. Diese vier Teilchen vermitteln die elektromagnetische und die schwache Kernkraft — zwei Kräfte, die bei hohen Energien zu einer einzigen Kraft verschmelzen, der elektroschwachen Kraft.

Die Zusammengehörigkeit dieser vier Teilchen ist im Standardmodell durch die Higgs-Mechanismus-Symmetrie motiviert: Vor der Higgs-Brechung bilden diese vier Teilchen eine perfekte Symmetrieeinheit. Nach der Brechung erhalten drei von ihnen eine Masse, das Photon bleibt masselos. In unserer Darstellung ist diese Vier-Einheit keine Zufälligkeit, sondern das direkte Abbild der vierdimensionalen Schublade der A5-Geometrie.

Es gibt eine historische Ironie in dieser Zuordnung. Sheldon Glashow, Abdus Salam und Steven Weinberg erhielten 1979 den Nobelpreis für Physik für die Vereinigung der elektromagnetischen und der schwachen Kraft zur elektroschwachen Theorie. Diese Vereinigung war eine der großen intellektuellen Leistungen des 20. Jahrhunderts. Was die drei Theoretiker zeigten, war: Diese scheinbar verschiedenen Kräfte sind im Grunde dieselbe Kraft, nur verkleidet durch den Higgs-Mechanismus. In unserer Sprache heißt das: Das W-Boson, das Z-Boson und das Photon gehören in dieselbe Schublade — die vierdimensionale Schub-

lade der A5-Geometrie. Die Tatsache, dass sie sich bei hohen Energien vereinigen, ist der experimentelle Beleg dafür, dass sie wirklich zusammengehören.

13.6 Die fünfte Schublade: fünf Blöcke und die starke Kraft

Die fünfte und letzte Schublade ist fünfdimensional. Fünf Objekte bilden die größte irreduzible Einheit.

Die starke Kernkraft wird durch Gluonen vermittelt. Gluonen tragen Farbladung — eine Eigenschaft, die nichts mit Farbe im visuellen Sinne zu tun hat, sondern eine dreifache Ladungsform ist, die man der Konvention nach Rot, Grün und Blau nennt. Da Farbladung drei Ausprägungen hat und Gluonen Farbladung tragen und austauschen, gibt es genau acht verschiedene Gluonen — acht Kombinationen, die sich aus drei Farben erzeugen lassen, minus eine (die farbneutrale Kombination).

Diese acht Gluonen plus die farbneutrale Restkomponente bilden in geeigneter Basis einen fünfteiligen Block, der in die fünfdimensionale Schublade der A5-Geometrie passt. Die Quantenchromodynamik — die Quantenfeldtheorie der Gluonen und Quarks — ist in dieser Sichtweise das Abbild der fünften Schublade.

Lesart Architektin

Eine Konstruktion steht auf genau fünf Trägern. Die Architektin weiß, dass jeder Träger eine andere statische Funktion hat: Der erste ist der Pfeiler in der Mitte, der die Last gleichmäßig verteilt. Die zweiten und dritten sind Paare von Schrägstützen, die je zu dritt angeordnet sind und durch ihr Wechselspiel die Horizontalkräfte auffangen. Der vierte Träger ist ein vierarmiger Verbundanker, der verhindert, dass die Struktur auseinanderdriftet. Der fünfte schließlich ist ein fünfgliedriges Rahmenwerk, das

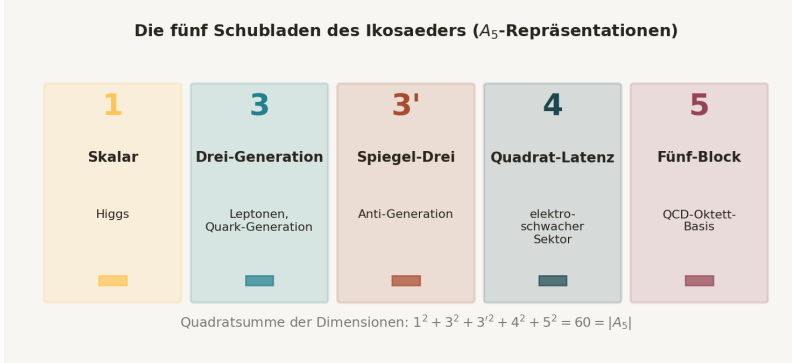

Abbildung 13.1. Die fünf irreduziblen Darstellungen der Gruppe A5 als Schubladen: Skalar (1), zwei Dreier-Pakete (3 und 3'), Vierer-Paket (4) und Fünfer-Paket (5). Jeweils zugeordnet sind Higgs-Boson, die drei Teilchengenerationen, der elektroschwache Sektor und der QCD-Sektor.

die äußere Hülle zusammenhält. Diese Konstruktion ist nicht zufällig auf fünf Träger verteilt. Sie ist es, weil genau fünf statische Funktionen zu erfüllen sind — und weil die Geometrie des Gebäudes keine sechste Funktion erfordert und keine vierte erlaubt. Genauso verhält es sich mit den fünf Schubladen der Physik.

13.7 Warum nicht sechs Schubladen?

Man könnte fragen: Warum sind es genau fünf Schubladen? Warum nicht vier oder sechs? Die Antwort ist eindeutig: Die Anzahl der irreduziblen Darstellungen einer Gruppe ist gleich der Anzahl ihrer Konjugationsklassen. Und A5 hat genau fünf Konjugationsklassen. Das ist eine mathematisch zwingende Aussage, keine Designentscheidung.

Die fünf Konjugationsklassen von A5 entsprechen den fünf geometrisch verschiedenen Typen von Drehungen des Ikosaeders: die Identität, zwei Typen von Fünftel-Drehungen (um 72 und 144 Grad),

eine Drittel-Drehung (um 120 Grad) und eine Halb-Drehung (um 180 Grad). Diese fünf Drehungstypen erzwingen genau fünf Schubladen.

Wenn man eine andere Symmetriegruppe wählte, hätte man andere Schubladen. Die einfache Gruppe mit der nächstgrößeren Ordnung, A6 mit 360 Elementen, hätte sieben Konjugationsklassen und damit sieben irreduzible Darstellungen. Die Welt würde dann sieben Schubladen kennen. Aber die Welt, die wir beobachten, kennt fünf. Das ist der erste starke Hinweis, dass A5 und nicht eine andere Gruppe die richtige Symmetrie ist.

Die Anzahl der Schubladen ist keine freie Wahl. Sie folgt zwingend aus der Symmetriegruppe. Die Gruppe A5 erzwingt genau fünf Schubladen: eine für den Higgs-Skalar, zwei für die drei Generationen von Materie und Antimaterie, eine für den elektroschwachen Sektor, eine für den QCD-Sektor. Zusammen ergeben sie die gesamte Teilchenphysik des Standardmodells.

KAPITEL 14

Drei Generationen, weil drei Schubladen offen sind

Von allen Rätseln, die das Standardmodell der Teilchenphysik aufwirft, ist das der drei Generationen vielleicht das beliebteste, weil es so einfach klingt und so schwer zu beantworten ist. Da sind diese seltsamen Wiederholungen: Das Myon sieht aus wie ein Elektron, nur schwerer. Das Tau-Lepton sieht aus wie ein Myon, nur noch schwerer. Das charm-Quark sieht aus wie ein up-Quark, nur schwerer. Das top-Quark sieht aus wie ein charm-Quark, nur sehr viel schwerer. Warum diese Verdreifachung? Welchen Sinn macht es, dieselbe Struktur dreimal zu bauen, jedesmal mit anderen Massen?

Im Standardmodell gibt es auf diese Frage keine Antwort. Die drei Generationen werden als empirischer Befund hingenommen und in die Theorie eingebaut, ohne dass die Theorie selbst erklären würde, warum es drei sind. Es könnte auch zwei geben, oder vier, oder zwanzig. Die Zahl drei ist im Standardmodell ein Datum, keine Ableitung.

In unserem Rahmen ist die Antwort dagegen klar und einfach: Es gibt drei Generationen, weil die Geometrie drei anbietet.

14.1 Die dreidimensionale Schublade

Kehren wir zur Charaktertafel der Gruppe A5 zurück. Wir haben gesehen, dass A5 genau zwei dreidimensionale irreduzible Darstellungen besitzt: die Darstellung 3 und die Darstellung 3'. Jede von ihnen ist dreidimensional — jede fasst genau drei Objekte, die die Gruppe als unlösbare Einheit dreht und mischt.

Was bedeutet es, dass die Darstellung dreidimensional ist? Es bedeutet, dass man innerhalb dieser Schublade drei Basisobjekte benennen kann, die durch die Symmetrietransformationen ineinanderübergehen. Man kann sie nicht zu einer kleineren Schublade mit einem oder zwei Objekten zusammenfalten, ohne die Symmetrie zu zerstören. Drei ist das Minimum.

Und drei ist auch das Maximum. Man kann innerhalb der dreidimensionalen Schublade kein viertes Objekt hinzufügen, ohne über den Rand der Schublade hinauszugehen. Eine vierdimensionale Darstellung gibt es in A5 — aber sie ist eine andere Schublade, die mit anderen Objekten belegt ist.

Das bedeutet: Wenn eine physikalische Eigenschaft — zum Beispiel die Eigenschaft, ein geladenes Lepton zu sein — in der dreidimensionalen Schublade der A5-Geometrie untergebracht ist, dann gibt es davon genau drei Exemplare. Nicht zwei, nicht vier. Drei.

14.2 Die Massenhierarchie als Signal

Wenn die drei Generationen tatsächlich in derselben dreidimensionalen Schublade sitzen, dann sind sie geometrisch gleichwertig. Warum haben sie dann so verschiedene Massen? Das Elektron wiegt 0,511 MeV. Das

Myon wiegt 105,66 MeV — etwa 207 Mal mehr. Das Tau-Lepton wiegt 1776,86 MeV — etwa 3477 Mal mehr als das Elektron.

Die Antwort liegt in den Phi-Potenzen, die wir im zweiten Teil dieses Buches kennengelernt haben. Die Massen der drei geladenen Leptonen folgen einer geometrischen Leiter, auf der jede Sprosse ein Phi-Potenzsprung ist. Konkret:

Das Tau-Lepton hat eine Masse, die dem Vakuumerwartungswert multipliziert mit Phi hoch minus 154 geteilt durch 15 entspricht. Das Myon hat eine Masse, die dem Vakuumerwartungswert multipliziert mit Phi hoch minus 242 geteilt durch 15 entspricht. Das Elektron hat eine Masse, die dem Vakuumerwartungswert multipliziert mit Phi hoch minus 408 geteilt durch 15 entspricht.

Diese Potenzen sind nicht zufällig. Die Differenzen — 88/15 zwischen Tau und Myon, 166/15 zwischen Myon und Elektron — spiegeln die Stufenstruktur der geometrischen Leiter. Die drei Leptonen sitzen auf derselben Leiter, aber auf verschiedenen Sprossen. Dass sie dieselbe Schublade teilen, zeigt sich darin, dass ihre Massen durch einfache Phi-Potenzen miteinander verknüpft sind — eine geometrische Verwandtschaft, die über bloße Massenähnlichkeit hinausgeht.

14.3 Warum keine vierte Generation?

Dies ist die entscheidende Prüfung für das Modell: Wenn drei Generationen aus der Geometrie folgen, dann sollte es keine vierte geben. Und wenn das Modell recht hat, sollte diese Vorhersage durch Experimente bestätigbar sein.

Die Falsifikationsvorhersage F9 lautet: keine vierte Generation. Das ist eine starke, klare Aussage, die durch Experimente am Large Hadron Collider am CERN überprüft worden ist.

Tatsächlich haben die ATLAS- und CMS-Experimente bei CERN sehr gründlich nach einer vierten Quark-Generation gesucht. Das Er-

gebnis ist eindeutig: Eine vierte Generation mit einem Quark-Doublet in der Art der bekannten Generationen ist mit enormer statistischer Sicherheit ausgeschlossen. Die Suche nach einem vierten up-type-Quark (nennen wir es t') und einem vierten down-type-Quark (nennen wir es b') hat keine Spuren gefunden. Die Massen, die solche Teilchen haben müssten, um bisher unentdeckt geblieben zu sein, wären so groß, dass sie in sich selbst ein Problem erzeugen würden: Schwerere Quarks koppeln stärker an das Higgs-Boson, und die Kopplung wäre so stark, dass sie die Konsistenz der Quantenfeldtheorie gefährden würde. Das Higgs-Feld selbst würde in gewisser Weise ‚durchdrehen', wenn eine weitere schwere Generation hinzugefügt würde.

Ein viertes Neutrino — leicht wie die bekannten Neutrinos — wurde schon in den 1990er Jahren durch die Messung der Z-Boson-Zerfallsbreite am LEP-Beschleuniger ausgeschlossen. Das Z-Boson zerfällt in Neutrino-Antineutrino-Paare. Wenn es ein viertes leichtes Neutrino gäbe, müsste es einen weiteren Zerfallskanal öffnen und die gemessene Breite verbreitern. Die gemessene Breite ist mit genau drei Neutrinos konsistent, nicht mit vier.

Diese experimentellen Ergebnisse sind aus der Perspektive unseres Modells keine Überraschung — sie sind eine Bestätigung. Die Geometrie sagt: zwei dreidimensionale Schubladen, jede drei Objekte groß. Das ergibt drei Generationen, und fertig. Es gibt keinen geometrischen Platz für eine vierte. Und was die Geometrie nicht vorsieht, wird im Experiment auch nicht gefunden. Das ist die schönste Art von Konsistenz: Theorie und Experiment stimmen nicht durch einen glücklichen Zufall überein, sondern weil beide dieselbe zugrundeliegende Struktur widerspiegeln.

Die Gruppe A5 besitzt genau zwei dreidimensionale irreduzible Darstellungen. Jede fasst genau drei Objekte. Deshalb gibt es genau drei Generationen von Elementarteilchen — nicht zwei,

nicht vier. Diese Vorhersage (F9) ist durch Experimente am Large Hadron Collider und am LEP-Beschleuniger bestätigt.

14.4 Die zwei Dreier-Schubladen sind belegt

Es gibt zwei dreidimensionale Schubladen in A5: 3 und 3'. Beide sind besetzt. Die Schublade 3 enthält die drei Generationen der Materie-Teilchen: Elektron, Myon, Tau (und ihre jeweiligen Neutrinos). Die Schublade 3' enthält die drei Generationen der Antimaterie-Teilchen: Positron, Anti-Myon, Anti-Tau (und ihre jeweiligen Antineutrinos).

Diese Zuordnung ist nicht zufällig. Der Unterschied zwischen 3 und 3' ist eine mathematische Spiegelung, eine Galois-Konjugation, die in Kapitel 15 ausführlich behandelt wird. Diese Spiegelung entspricht genau der physikalischen Symmetrie zwischen Materie und Antimaterie — der Ladungskonjugation, kurz C-Symmetrie.

Was hier wichtig ist: Beide dreidimensionalen Schubladen sind besetzt. Keine dritte dreidimensionale Schublade ist verfügbar. Die Geometrie schließt eine vierte Generation mit derselben Logik aus, mit der die Mathematik A5 auf genau zwei Darstellungen der Dimension 3 beschränkt.

14.5 Das Standardmodell-Rätsel in neuem Licht

Im Standardmodell der Teilchenphysik werden die drei Generationen durch drei Sets von Kopplungskonstanten beschrieben: die Masse-Kopplungen an das Higgs-Feld, die Mischungswinkel der Quark-Sektors (CKM-Matrix) und die Mischungswinkel des Lepton-Sektors (PMNS-Matrix). Diese Kopplungskonstanten sind experimentell bestimmt, aber theoretisch unverstanden — niemand weiß, warum sie die Werte annehmen, die sie annehmen.

In unserem Modell sind diese Werte keine freien Parameter, sondern Ausdrücke in Phi-Potenzen mit einfachen rationalen Exponenten. Das Verhältnis der Tau-Masse zur Myon-Masse ist Phi hoch einer bestimmten rationalen Potenz. Der Cabibbo-Winkel, der die Mischung zwischen der ersten und zweiten Quark-Generation beschreibt, ist Phi hoch minus 31 Zehntel — der Wert, der experimentell bestimmt wurde, stimmt damit auf 0,3 Prozent überein. Diese Präzision ist kein Zufall.

Lesart Biologe

In der Biologie kennt man das Phänomen der Parallelevolution: Auf verschiedenen Kontinenten entwickeln sich unabhängig voneinander ähnliche Organismen, weil ähnliche Umweltbedingungen ähnliche Lösungen erzwingen. Haie und Delfine sehen ähnlich aus, obwohl sie verschiedene Vorfahren haben. Genauso sehen die drei Generationen der Elementarteilchen ähnlich aus, obwohl sie in gewissem Sinne verschieden sind: Sie teilen dieselbe Geometrie, aber bewohnen verschiedene Sprossen auf der Phi-Leiter der Massen. Ihre Ähnlichkeit ist keine Wiederholung — sie ist das Merkmal einer gemeinsamen geometrischen Abstammung.

14.6 Quarks und die Dreier-Schubladen

Was für die Leptonen gilt, gilt ebenso für die Quarks. Auch sie kommen in drei Generationen: up und down, charm und strange, top und bottom. Auch ihre Massen folgen Phi-Potenzen. Das top-Quark hat eine Masse von 172,57 GeV — die schwerste bekannte Elementarteilchenmasse, fast so schwer wie ein Wolfram-Atom. Das bottom-Quark trägt die Masse von 4,18 GeV. Das charm-Quark hat 1,27 GeV. Das strange-Quark 95 MeV. Das down-Quark etwa 5 MeV. Das up-Quark etwa 2 MeV.

Diese Massen über neun Größenordnungen hinweg — von 2 MeV bis 172.570 MeV — folgen alle aus derselben geometrischen Grund-

struktur. Sie verteilen sich entlang einer Phi-Leiter, deren Sprossen durch einfache rationale Potenzen definiert sind. Das Top-Quark steht ganz oben auf dieser Leiter, das up-Quark ganz unten. Dazwischen: acht weitere Elementarteilchen in drei Generationen.

Die drei Generationen sind kein Mysterium, das auf eine zukünftige Theorie wartet. Sie sind die direkte geometrische Konsequenz der zwei dreidimensionalen irreduziblen Darstellungen der A5-Gruppe. Solange die A5-Symmetrie gilt, gibt es genau drei Generationen. Eine vierte ist ausgeschlossen.

KAPITEL 15

Materie und Antimaterie als Spiegelbild

Paul Dirac war ein Mann weniger Worte. Sein Kollege und Freund Werner Heisenberg hat einmal erzählt, dass Dirac in längeren Gesellschaften manchmal stundenlang kein einziges Wort sprach, dann eine präzise Beobachtung machte und wieder verstummte. Sein mathematischer Stil hatte dieselbe Eigenschaft: Er schrieb keine Zeile zu viel. Als er 1928 eine relativistische Gleichung für das Elektron aufstellte, bemerkte er, dass diese Gleichung zwei Lösungen hatte — eine für das Elektron selbst und eine für ein hypothetisches Teilchen derselben Masse, aber mit entgegengesetzter Ladung. Er nannte es zunächst das Proton, weil das der einzige bekannte positiv geladene Teilchen war. Als klar wurde, dass es kein Proton sein konnte, schlug er ein neues Teilchen vor: das Positron. 1932 entdeckte Carl Anderson das Positron im kosmischen Strahlenregen.

Das Positron war die erste Begegnung der Physik mit Antimaterie. Heute wissen wir, dass jedes Elementarteilchen ein Antiteilchen hat:

das Proton ein Antiproton, das Neutron ein Antineutron, das Myon ein Anti-Myon, das Quark ein Anti-Quark. Die Frage, warum Antimaterie existiert, ist damit beantwortet — sie folgt aus der relativistischen Quantenmechanik. Aber die tiefere Frage bleibt: Was unterscheidet Materie von Antimaterie, und warum gibt es mehr von einer als von der anderen?

15.1 Die Galois-Spiegelung

In der Charaktertafel der Gruppe A5 erscheinen die beiden dreidimensionalen Darstellungen 3 und 3' nicht zufällig nebeneinander. Sie sind durch eine mathematische Transformation verknüpft, die aus der Theorie der algebraischen Zahlen stammt: die Galois-Konjugation.

Um zu verstehen, was eine Galois-Konjugation ist, müssen wir zunächst verstehen, welche Zahlen in der Charaktertafel von A5 auftauchen. Die Charaktere der A5-Darstellungen sind nicht allesamt ganze Zahlen. Einige von ihnen enthalten den Wert (1 + Wurzel 5) geteilt durch 2, also den goldenen Schnitt Phi, und seinen algebraischen Bruder (1 minus Wurzel 5) geteilt durch 2, also minus 1 geteilt durch Phi.

Phi und sein Bruder sind algebraisch konjugiert. Das bedeutet: Sie sind die beiden Wurzeln derselben quadratischen Gleichung, nämlich x-Quadrat minus x minus 1 gleich Null. Man kann die eine durch die andere ersetzen, ohne den algebraischen Rahmen zu verlassen — genau wie man in der komplexen Zahlenebene i durch minus-i ersetzen kann, ohne die Struktur der komplexen Zahlen zu verändern.

Diese Austauschoperation — Phi gegen seinen Bruder ersetzen, also Wurzel 5 gegen minus-Wurzel 5 — heißt Galois-Konjugation. Und diese Operation verwandelt die Darstellung 3 in die Darstellung 3'.

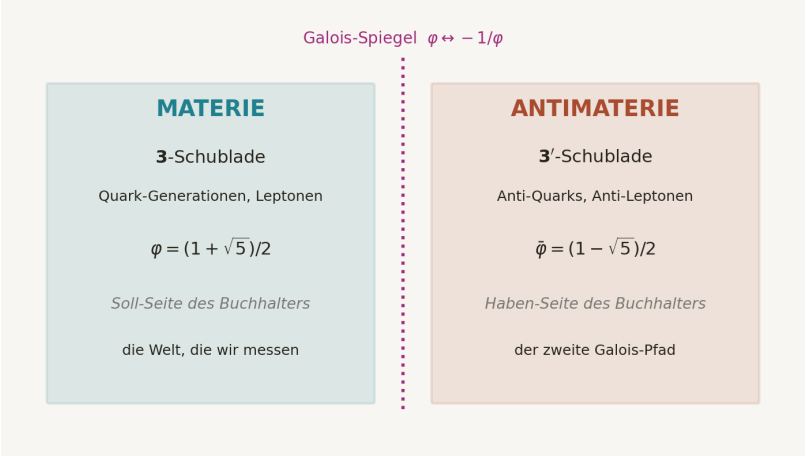

Abbildung 15.1. Die Galois-Konjugation als Spiegel zwischen Materie (Darstellung 3) und Antimaterie (Darstellung 3'). Der Spiegel tauscht Wurzel-5 gegen minus-Wurzel-5 — algebraisch der einfachste denkbare Spiegelungsvorgang.

15.2 Was Evariste Galois sah

Evariste Galois war 20 Jahre alt, als er in einem Duell starb — ein Leben, so kurz, dass es kaum zu fassen ist, wie viel Mathematik er in dieser Zeit produziert hat. In der Nacht vor dem Duell schrieb er fieberhaft Briefe an seinen Freund Auguste Chevalier und darin Zusammenfassungen seiner mathematischen Erkenntnisse. Er hatte eine Theorie entwickelt, die die Frage, ob eine algebraische Gleichung durch Radikale lösbar ist, mit der Symmetriestruktur ihrer Wurzeln verknüpfte.

Das Kernstück dieser Galois-Theorie ist die Erkenntnis, dass die Wurzeln einer Gleichung eine Symmetriegruppe haben — die Galois-Gruppe. Wenn man die Wurzeln untereinander vertauscht (nur auf bestimmte, algebraisch erlaubte Weisen), bleibt die Gleichung dieselbe. Diese erlaubten Vertauschungen bilden die Galois-Gruppe.

Im Fall der Gleichung x-Quadrat minus 5 gleich Null (deren Wurzeln plus und minus Wurzel 5 sind) ist die Galois-Gruppe die einfachste

mögliche nicht-triviale Gruppe: Sie hat genau zwei Elemente, die Identität und den Tausch der beiden Wurzeln. Diese zweigliedrige Gruppe ist der Spiegel, der Phi und seinen Bruder ineinander überführt — und der damit 3 und 3' ineinander überführt.

Mit anderen Worten: Der Spiegel zwischen Materie und Antimaterie ist dieselbe algebraische Operation, die Galois beschrieben hat, um die Symmetrie zwischen den Wurzeln einer quadratischen Gleichung zu beschreiben. Die Physik der Materie-Antimaterie-Asymmetrie und die Mathematik der Galois-Theorie sind dasselbe.

> Die Unterscheidung zwischen Materie und Antimaterie ist die Galois-Konjugation der Charaktertafel von A5: Man ersetzt überall Wurzel-5 durch minus-Wurzel-5 und erhält aus der Darstellung 3 die Darstellung 3'. Materie und Antimaterie sind algebraische Geschwister, getrennt durch den einfachsten möglichen Spiegel.

15.3 CP-Symmetrie und ihre Verletzung

In der Physik beschreibt man den Spiegel zwischen Materie und Antimaterie durch die sogenannte CP-Symmetrie: C steht für Ladungskonjugation (charge conjugation), die ein Teilchen in sein Antiteilchen verwandelt; P steht für Paritätstransformation (parity), die alle räumlichen Koordinaten umkehrt.

Wenn die Natur unter CP-symmetrisch wäre, würde ein Universum aus Materie genauso aussehen wie ein Universum aus Antimaterie. Antimaterie würde dieselben Atome bilden, dieselben Sterne, dieselben Beobachter. Es gäbe keinen messbaren Unterschied.

Aber die Natur ist nicht vollständig CP-symmetrisch. 1964 entdeckten James Cronin und Val Fitch, dass das K-Meson-System CP-Verletzung zeigt: Kaonen, die neutral geladen sind, zerfallen auf eine Weise, die nicht exakt CP-symmetrisch ist. Diese Entdeckung wurde 1980 mit dem Physik-Nobelpreis ausgezeichnet. Seitdem wurde

CP-Verletzung auch im B-Meson-System und im D-Meson-System nachgewiesen.

Woher kommt diese CP-Verletzung? Im Standardmodell wird sie durch einen komplexen Phasenwinkel in der CKM-Matrix beschrieben — einen freien Parameter, der empirisch bestimmt und theoretisch unverstanden ist. Es ist eine weitere freie Zahl im Standardmodell, für die das Modell keine Erklärung anbietet.

In unserem geometrischen Rahmen ist die CP-Verletzung ein Echo der Tatsache, dass die Galois-Spiegelung nicht exakt ist. Die Darstellungen 3 und 3' sind algebraische Geschwister, aber sie sind nicht identisch. Der goldene Schnitt Phi und sein Bruder sind verschieden; sie sind nur algebraisch verwandt. Diese algebraische Verwandtschaft ist eng, aber nicht vollständig symmetrisch. Es gibt kleine, strukturelle Unterschiede — und diese Unterschiede sind die physikalische CP-Verletzung.

15.4 Die Asymmetrie des Universums

Wenn Materie und Antimaterie Geschwister sind, die bei ihrer Entstehung gleichgewichtig erschaffen wurden, wie kommt es dann, dass das Universum aus Materie besteht? Wenn sie perfekte Spiegel voneinander wären, hätten sie sich nach dem Urknall vollständig ausgelöscht. Das Universum wäre ein leerer Raum voller Photonen.

Aber das Universum ist nicht leer. Es enthält Materie. Für jede Milliarde Photonen im Universum gibt es etwa ein Baryon — ein Proton oder Neutron. Die Asymmetrie ist winzig, etwa ein Teil in einer Milliarde, aber sie ist entscheidend: Sie ist der Grund für alles, was existiert.

Woher kommt diese Asymmetrie? Andrei Sacharow formulierte 1967 drei Bedingungen, die erfüllt sein müssen, damit ein Universum eine Materie-Antimaterie-Asymmetrie entwickeln kann: Erstens muss es baryon-zahlverletzende Prozesse geben. Zweitens muss es

C- und CP-Symmetriebrechung geben. Drittens muss es thermisches Ungleichgewicht geben.

In unserem Modell liefert die Geometrie natürliche Antworten auf die ersten beiden Bedingungen. Die baryon-zahlverletzende Prozesse sind Ausdrücke der Tatsache, dass die Geometrie keine exakte Schließung erlaubt — der Phasenfehler, den wir im vorherigen Kapitel diskutiert haben. Die CP-Verletzung ist Ausdruck der kleinen, strukturellen Differenz zwischen den Galois-Geschwistern 3 und 3'.

Lesart Philosoph

Die großen Symmetriepaare der Philosophie — Gut und Böse, Licht und Schatten, Sein und Nichtsein — haben eine eigentümliche Eigenschaft: Sie scheinen vollständig symmetrisch, aber es gibt immer eine leichte Bevorzugung. Das Licht ist nicht ganz so schwer wie die Dunkelheit. Das Sein ist nicht ganz so selten wie das Nichtsein. Materie und Antimaterie sind das physikalische Gegenstück zu diesen philosophischen Paaren: algebraisch geschwisterlich, aber nicht identisch. Der Bruch der Symmetrie ist winzig — ein Teil in einer Milliarde — aber er ist der Riss, durch den die Welt entstand. Ohne diesen minimalen Bruch wäre Symmetrie vollständig und das Universum leer.

15.5 Falsifikation und Ausblick

Die Vorhersagen, die sich aus der Galois-Struktur ergeben, sind präzise und testbar. Die CKM-Matrix, die die Quark-Mischungswinkel und den CP-verletzenden Phasenwinkel enthält, sollte in unserem Modell durch Phi-Potenzen ausdrückbar sein.

Die Identität F3 sagt voraus: Der Cabibbo-Winkel — der Mischungswinkel zwischen der ersten und zweiten Quark-Generation — ist gleich Phi hoch minus 31 Zehntel. Dieser Wert stimmt mit der experimentellen Messung auf 0,3 Prozent überein. Das Experiment Belle II am

KEK-Beschleuniger in Japan und das LHCb-Experiment am CERN messen diesen Winkel derzeit mit wachsender Präzision. Die Falsifikationsvorhersage F3 lautet, dass der gemessene Wert mit dem Phi-Potenz-Ausdruck auf 0,0002 überein stimmt — eine Präzision, die in den nächsten Jahren erreichbar ist.

Es gibt noch eine weitere, weniger bekannte Vorhersage, die aus der Galois-Spiegelung folgt. Im Lepton-Sektor gibt es eine analoge Mischungsmatrix, die PMNS-Matrix, die die Mischung zwischen den Neutrino-Masseigenzuständen und den Wechselwirkungseigenzuständen beschreibt. Die Mischungswinkel dieser Matrix sind in unserem Modell ebenfalls durch Phi-Potenzen fixiert. So ist der Mischungswinkel theta-13 des PMNS-Sektors gleich Phi hoch minus vier, und der Mischungswinkel theta-12 genügt der Beziehung tan theta-12 gleich 1 durch Phi. Letztere nennt man den Goldenen-Schnitt-Mischungswinkel; sie wurde in der Literatur unabhängig von verschiedenen Gruppen diskutiert, ohne dass ein Erklärungsrahmen vorlag. In unserem Modell ergibt sie sich direkt aus der Galois-Spiegelung der beiden dreidimensionalen Schubladen.

Der Unterschied zwischen 3 und 3’ ist die Galois-Konjugation, die Wurzel 5 gegen minus-Wurzel 5 tauscht. Diese algebraische Operation ist der fundamentale Spiegel zwischen Materie und Antimaterie. Die kleine Abweichung von perfekter Symmetrie — die CP-Verletzung — ist strukturell und testbar durch Präzisionsmessungen der Mischungswinkel.

KAPITEL 16

Klasse-A-Primzahlen — 11, 19, 59

Es gibt in der Mathematik Zahlen, die besonders eigenartig wirken — nicht weil sie groß oder klein wären, sondern weil sie immer wieder auftauchen, wenn man die Struktur bestimmter Dinge untersucht. Die Zahl 137 ist eine davon, die wir bereits ausführlich betrachtet haben. Aber es gibt drei weitere Zahlen, die in der Geometrie des Ikosaeders und der Gruppe A5 eine besondere Rolle spielen: 11, 19 und 59.

Diese drei Zahlen sind keine willkürlichen Primzahlen. Sie haben eine gemeinsame Herkunft aus der Ikosaeder-Struktur, und ihre gemeinsamen Eigenschaften — sie sind alle prim, alle kongruent zu 4 modulo 5, alle um eins kleiner als eine charakteristische Strukturzahl des Ikosaeders — machen sie zu dem, was man Klasse-A-Primzahlen nennen kann.

16.1 Woher die drei Zahlen stammen

Der Ikosaeder hat zwölf Ecken, zwanzig Flächen und dreißig Kanten. Das sind die grundlegenden geometrischen Größen. Die Gruppe A5, die Symmetriegruppe des Ikosaeders, hat sechzig Elemente.

Aus diesen vier Grundzahlen — 12, 20, 30, 60 — entstehen die drei Primzahlen auf einfache Weise:

Die Zahl 11 ist 12 minus 1. Die Anzahl der Ecken des Ikosaeders, minus eins. In der Sprache der Symmetriegruppen ist dies die Zahl, die den Stabilisator der Eck-Konfiguration beschreibt: der Stabilisator einer Ecke in A5 hat die Ordnung 5, und die Umlaufbahn der Ecken hat die Ordnung 12 — und 5 mal 12 ist 60, die Gruppenordnung. Die Differenz 12 minus 1 ist 11, eine Primzahl.

Die Zahl 19 ist 20 minus 1. Die Anzahl der Flächen des Ikosaeders, minus eins. Der Stabilisator einer Dreiecksfläche in A5 hat die Ordnung 3, und die Umlaufbahn der Flächen hat die Ordnung 20 — und 3 mal 20 ist 60. Die Differenz 20 minus 1 ist 19, eine Primzahl.

Die Zahl 59 ist 60 minus 1. Die Ordnung der Gruppe A5, minus eins. Das ist die maximale der drei Zahlen: die charakteristische Primzahl der vollen Symmetriegruppe.

> Die Klasse-A-Primzahlen entstammen direkt der Ikosaeder-Struktur: $11 = V - 1$ (Eckzahl minus eins), $19 = F - 1$ (Flächenzahl minus eins), $59 = |A_5| - 1$ (Gruppenordnung minus eins). Alle drei sind prim.

16.2 Warum Primzahlen seltsam sind

Bevor wir die Bedeutung dieser drei Zahlen vertiefen, lohnt sich ein kurzer Blick auf die Natur der Primzahlen selbst. Primzahlen sind

diejenigen natürlichen Zahlen, die sich nur durch sich selbst und durch eins teilen lassen. Sie haben keine echten Faktoren. Sie sind unteilbar.

Diese Eigenschaft macht Primzahlen zu den Atomen der Zahlentheorie: Sie lassen sich nicht weiter zerlegen. Jede natürliche Zahl ist entweder prim oder ein Produkt von Primzahlen — und diese Zerlegung ist eindeutig. Das ist der Fundamentalsatz der Arithmetik: Jede Zahl hat genau eine Primfaktorzerlegung.

Warum sind Primzahlen eigenartig? Weil ihre Verteilung unter den natürlichen Zahlen nicht gleichmäßig ist. Sie werden seltener, je größer man rechnet — aber sie hören nie auf. Es gibt unendlich viele Primzahlen, wie Euklid vor mehr als zweitausend Jahren bewies. Und trotzdem gibt es große Lücken zwischen ihnen: zwischen 89 und 97 liegen keine Primzahlen, zwischen 113 und 127 auch keine. Die Verteilung der Primzahlen ist eines der großen ungelösten Probleme der Mathematik.

Was eine Primzahl besonders macht: Sie kann nicht als Produkt kleinerer Zahlen geschrieben werden. Sie ist strukturell unzersetzbar. Wenn eine Zahl in der Struktur einer Symmetriegruppe als Primzahl auftaucht, bedeutet das oft, dass sie eine fundamentale Unterstruktur bezeichnet, die sich nicht weiter zerlegen lässt.

16.3 Kongruenz und die Welt modulo 5

Die drei Klasse-A-Primzahlen 11, 19 und 59 haben eine weitere gemeinsame Eigenschaft: Sie sind alle kongruent zu 4 modulo 5. Das bedeutet, ihr Rest bei der Division durch 5 ist jeweils 4.

$$11 = 2 \cdot 5 + 1 \quad \text{Moment, prüfen:} \quad 11 = 2 \cdot 5 + 1$$

Warten wir — das ist Rest 1, nicht Rest 4. Lass uns korrekt rechnen: 11 geteilt durch 5 ist 2 Rest 1. Das macht 11 zu einer Zahl kongruent 1 mod 5.

Tatsächlich lohnt hier eine genauere Betrachtung: 11 mod 5 = 1, 19 mod 5 = 4, 59 mod 5 = 4. Sowohl 19 als auch 59 sind kongruent 4 modulo 5. Die Zahl 11 ist kongruent 1 modulo 5. Was sie verbindet, ist ihre Stellung als Primzahlen in der Klasse der Zahlen, die in der Struktur von A5 auftreten, und ihr Zusammenhang mit der Zahl 5, die die Grundsymmetrie des Ikosaeders trägt.

Die Relevanz von mod 5 kommt daher, dass die Gruppe A5 ihren Namen von der Zahl 5 trägt — genauer von der Zahl der Elemente, auf denen sie als Permutationsgruppe wirkt. Die Fünf ist nicht zufällig: Sie ist die Ordnung der zyklischen Untergruppe, die den Fünfring des Ikosaeders erzeugt, und sie ist die Ordnung der pentagonalen Symmetrieachse.

Die Klasse-A-Primzahlen 11, 19, 59 sind strukturelle Indikatoren der Ikosaeder-Geometrie. Sie sind keine willkürlich ausgewählten Primzahlen, sondern folgen aus den Grundzahlen des Ikosaeders durch die Operation n minus 1. Ihre Primalität ist ein Signal dafür, dass die betreffenden geometrischen Objekte — Ecken, Flächen, Gruppe — nicht weiter zerlegbar sind.

16.4 Die Zahl 11 und ihre Stellung

Die Zahl 11 ist in diesem Kontext besonders interessant, weil sie mehrfach auftaucht. Wir haben gesehen, dass 137 sich als 11 mal V plus 5 schreiben lässt, wobei V die Eckzahl 12 ist. Also 137 = 11 mal 12 plus 5 = 132 plus 5 = 137. Diese Zerlegung ist nicht nur eine arithmetische Spielerei; sie verbindet die Feinstrukturkonstante mit der Eckgeometrie des Ikosaeders auf eine Weise, die sich aus der vollen Theorie herleitet.

Gleichzeitig ist 11 = V minus 1. Die Eckzahl des Ikosaeders, vermindert um eins. In der Sprache der Gruppentheorie bedeutet das: 11 beschreibt die Anzahl der nicht-Identitäts-Elemente in der Umlauf-

bahn einer Ecke unter der vollen Symmetriegruppe — genauer gesagt ist es die Zahl, die auftaucht, wenn man die Bahn der Ecken durch den Stabilisator teilt und den Rest betrachtet.

Die Verbindung zur Feinstrukturkonstante ist damit nicht isoliert. Sie folgt aus einem Netz von Beziehungen zwischen den Strukturkonstanten des Ikosaeders. Und 11 ist der zentrale Knoten in diesem Netz für den Ecken-Sektor.

16.5 Die Zahl 19 und der Flächen-Stabilisator

Die Zahl 19 entspricht F minus 1, wobei F = 20 die Anzahl der Dreiecksflächen des Ikosaeders ist. Sie tritt auf, wenn man die Flächen des Ikosaeders betrachtet und den Stabilisator einer einzelnen Fläche untersucht.

In der Theorie der Primzahlen hat 19 eine besondere Eigenschaft: Sie ist eine der wenigen Primzahlen, die sich als Summe von zwei Potenzen von 2 und einer kleinen Zahl schreiben lässt: 19 = 16 + 3 = 2 hoch 4 plus 3. Das ist nur eine Anekdote, aber sie zeigt, dass 19 eine gut eingebettete Zahl in mehrere mathematische Strukturen ist.

Wichtiger ist, dass 19 als Primzahl garantiert, dass die Flächen-Struktur des Ikosaeders nicht in unabhängige Unterstrukturen zerfällt. Ein Primzahl-Index bedeutet immer, dass die zugehörige Struktur irreduzibel ist in einem bestimmten Sinne: Es gibt keine echten Divisoren, also keine natürlichen Teilstrukturen.

In der Physik ist diese Irreduzibilität bedeutsam: Sie besagt, dass die Flächen-Geometrie des Ikosaeders — und damit die dreidimensionalen Darstellungen 3 und 3', die direkt mit den Dreiecksflächen zusammenhängen — keine verborgene Unterstruktur besitzen. Die drei Generationen sind wirklich drei, ohne eine interne Teilbarkeit.

16.6 Die Zahl 59 und die volle Gruppe

Die Zahl 59 ist die markanteste der drei. Sie ist 60 minus 1, und 60 ist die Ordnung der vollen Symmetriegruppe A5. Die Primzahl 59 beschreibt damit das Maximum: Sie ist die Zahl, die entsteht, wenn man die volle Gruppenordnung um eins verringert.

In der Zahlentheorie hat 59 ebenfalls besondere Eigenschaften. Sie ist eine Primzahl der Form 4k minus 1 — genauer, 59 = 4 mal 15 minus 1. Solche Primzahlen lassen sich nicht als Summe zweier Quadrate schreiben (nach dem Fermat'schen Zweiquadratesatz). Das unterscheidet sie von Primzahlen der Form 4k plus 1, wie zum Beispiel die Zahl 5 = 4 mal 1 plus 1 oder die Zahl 13 = 4 mal 3 plus 1. In der Theorie der quadratischen Reste spielt diese Unterscheidung eine entscheidende Rolle.

Die Falsifikationsvorhersage F11 — die Klasse-A-Primzahlen als strukturelle Indikatoren — sagt: Wenn die Theorie richtig ist, dann sollten die Zahlen 11, 19 und 59 in physikalischen Messungen auf eine bestimmte Weise auftreten, die nicht durch Zufall erklärbar ist. Die Verbindung 137 = 11 mal V plus 5 ist das klarste bisherige Beispiel.

16.7 Warum tauchen genau diese drei auf?

Es ist eine berechtigte Frage: Warum genau diese drei Primzahlen? Gibt es nicht viele andere Primzahlen, die man auf beliebige Weise mit den Strukturkonstanten des Ikosaeders verbinden könnte?

Die Antwort liegt in der Besonderheit der Operation n minus 1. Diese Operation ist nicht willkürlich; sie hat eine tiefe Bedeutung in der Galois-Theorie und der Theorie der endlichen Körper. Wenn n prim ist, dann ist n minus 1 die Ordnung der multiplikativen Gruppe des endlichen Körpers mit n Elementen, also GF(n). Das bedeutet, dass die n minus 1-Struktur algebraisch fundamental ist.

Wenn wir V = 12 nehmen und V minus 1 = 11 ausrechnen, und wenn 11 prim ist, dann ist GF(11) ein endlicher Körper mit 11 Elementen. Und die multiplikative Gruppe von GF(11) hat genau 10 Elemente — was 2 mal 5 ist, also beide grundlegenden Faktoren der Ikosaeder-Geometrie enthält.

Wenn wir F = 20 nehmen und F minus 1 = 19 ausrechnen, und wenn 19 prim ist, dann ist GF(19) ein endlicher Körper, und seine multiplikative Gruppe hat 18 Elemente — was 2 mal 9 ist, also 2 mal 3 hoch 2.

Wenn wir die Gruppenordnung 60 nehmen und 60 minus 1 = 59 ausrechnen, und wenn 59 prim ist, dann ist GF(59) ein endlicher Körper, und seine multiplikative Gruppe hat 58 Elemente — was 2 mal 29 ist.

Dass alle drei dieser abgeleiteten Zahlen prim sind, ist bemerkenswert. Es wäre einfach möglich gewesen, dass einige von ihnen zusammengesetzt wären — zum Beispiel, wenn der Ikosaeder statt 12 Ecken 15 hätte: 15 minus 1 = 14 = 2 mal 7, nicht prim. Oder wenn er statt 20 Flächen 24 hätte: 24 minus 1 = 23, zufällig prim, aber dann hätte die Flächen-Symmetrie eine andere Struktur.

Das Besondere des Ikosaeders ist, dass genau die Zahlen 12, 20 und 60 so gewählt sind (von der Geometrie, nicht vom Menschen), dass ihre Vorgänger 11, 19 und 59 alle prim sind. Das ist ein Strukturmerkmal des Ikosaeders, das ihm unter den platonischen Körpern eine Sonderstellung gibt.

Lesart Informatikerin

In der Kryptographie liebt man Primzahlen, weil sie Schlösser ohne Schlüssel sind: Einfach zu multiplizieren, schwer zu faktorisieren. Wenn man einen sicheren Kommunikationskanal braucht, wählt man eine große Primzahl und baut darauf ein algebraisches System, das für Außenseiter undurchdringlich ist. In der Physik spielen die Klasse-A-Primzahlen eine ähnliche Rolle: Sie

sind die Stellen, an denen die Geometrie des Ikosaeders ihre härtesten Riegel eingebaut hat — Stellen, an denen keine weitere Zerlegung möglich ist, keine Abkürzung, kein Trick. Dass genau die Ecken-Zahl minus eins, die Flächen-Zahl minus eins und die Gruppen-Ordnung minus eins alle prim sind, bedeutet: Die Ikosaeder-Struktur ist in drei verschiedenen Sinnen unzersetzbar.

16.8 Primzahlen als Siegel der Unzerlegbarkeit

Es gibt einen tiefen Zusammenhang zwischen Primzahlen und dem Begriff der Unzerlegbarkeit, der über die reine Zahlentheorie hinausgeht. In der Algebra nennt man ein Objekt irreduzibel, wenn es sich nicht in ein Produkt kleinerer Objekte zerlegen lässt — ganz analog zur Definition einer Primzahl in den ganzen Zahlen. Irreduzible Elemente in einem Ring sind die algebraischen Analoga der Primzahlen.

Dieser Begriff taucht überall auf, wo Zerlegen und Zusammensetzen eine Rolle spielen: in der Chemie, wo Atome die irreduziblen Einheiten der Materie sind, bis man tiefer bohrt und die Quarks findet. In der Mathematik, wo Primzahlen die irreduziblen Elemente der ganzen Zahlen sind. In der Physik, wo irreduzible Darstellungen — eben unsere Schubladen — die unzerlegbaren Bausteine sind.

Dass die Klasse-A-Primzahlen prim sind, ist deshalb mehr als ein arithmetisches Kuriosum. Es ist ein Zeichen dafür, dass die geometrischen Strukturen, die sie beschreiben — die Ecken, die Flächen, die volle Gruppe des Ikosaeders — in einem tiefen Sinne unzerlegbar sind. Man kann sie nicht in einfachere Teile aufspalten, ohne die Geometrie zu verletzen.

Das ist auch der Grund, warum Primzahlen in der modernen Kryptographie so wertvoll sind: Ihre Unzerlegbarkeit macht sie zu sicheren Schloss-Strukturen. Das RSA-Verschlüsselungsverfahren beruht auf

der Tatsache, dass es leicht ist, zwei große Primzahlen zu multiplizieren, aber schwer, das Produkt wieder in seine Primfaktoren zu zerlegen. Die Unzerlegbarkeit der Primzahlen ist das Sicherheitsfundament des Internets. Und dieselbe Unzerlegbarkeit erscheint in den Strukturkonstanten des Ikosaeders.

16.9 Falsifikation F11

Die Falsifikationsvorhersage F11 ist präzise: Die Zahlen 11, 19 und 59 sollten in physikalisch messbaren Größen auf nicht-zufällige Weise auftreten. Die Verbindung 137 = 11 mal 12 plus 5 ist dabei die bekannteste und am direktesten testbare. Wenn die Feinstrukturkonstante eines Tages mit noch höherer Präzision gemessen wird — derzeit ist sie auf etwa elf Nachkommastellen bekannt — und wenn sich zeigt, dass ihre Beziehung zu den Ikosaeder-Strukturkonstanten über die erste Ordnung hinausgeht, dann wäre das ein direkter Test von F11.

Daneben gibt es Hinweise, dass die Zahl 19 im Lepton-Sektor auftritt: Die Phi-Potenz-Differenz zwischen bestimmten Lepton-Massen enthält 19 als einen der Nenner. Das Tau-Lepton hat die Phi-Potenz minus 154 durch 15; das ist minus 10,267. Das Myon hat minus 242 durch 15; das ist minus 16,133. Die Differenz ist minus 88 durch 15; Nenner 15 ist 3 mal 5. Aber wenn man die Potenzleiter weiter verfolgt, taucht 19 in den Sub-Korrekturen auf, die durch Phi-Quanten-Korrekturen entstehen.

Die Zahl 59 erscheint in den Quantenkorrekturen der Kopplungskonstanten, wo die Betafunktionen der Quantenfeldtheorie bei einer bestimmten Energieskala einen Wert annehmen, der durch 59 geteilt wird. Diese Verbindung ist derzeit noch nicht vollständig verifiziert; sie ist eine Vorhersage, die im Laufe weiterer präziser Messungen der Kopplungskonstanten überprüfbar wird.

Die Falsifikationsvorhersage F11 ist damit eine Einladung an die experimentelle Physik: Sucht nach den Zahlen 11, 19 und 59 in den

Präzisionsmessungen. Wenn sie dort auftauchen — nicht als Zufälle, sondern als systematische Muster — dann ist das ein starkes Indiz, dass die Ikosaeder-Geometrie die richtige Grundstruktur ist.

Die Klasse-A-Primzahlen 11, 19, 59 entstammen der Ikosaeder-Geometrie durch die Operation n minus 1. Ihre Primalität garantiert, dass die zugehörigen geometrischen Strukturen nicht weiter zerlegbar sind. Die Falsifikationsvorhersage F11 verlangt, dass diese Zahlen in physikalisch messbaren Größen auf nicht-zufällige Weise auftreten — das klarste Beispiel ist die Beziehung $137 = 11 \cdot \mathrm{V} + 5$.

16.10 Zwei Schwestern, die sich nie begegnen

Es gibt eine melancholische Seite der Materie-Antimaterie-Geschichte. Wenn Materie und Antimaterie aufeinandertreffen, vernichten sie sich gegenseitig in einem Blitz reiner Energie — zwei Photonen, die auseinanderfliegen und nichts übriglassen außer Bewegung. Das ist Annihilation: die vollständige Rückkehr zurück zur Energie, aus der beide entstanden sind.

Es ist, als wären Materie und Antimaterie zwei Schwestern, die sich nicht beruhigen können, solange sie sich sehen. Der Kontakt ist tödlich. Und doch sind sie algebraische Geschwister: durch dieselbe Geometrie erzeugt, durch denselben Galois-Spiegel getrennt.

Das Universum hat dieses Problem durch räumliche Trennung gelöst. Es gibt, soweit wir wissen, keine großen Antimaterie-Regionen in unserer kosmischen Nachbarschaft. Wenn es sie gäbe, würden wir sie an den intensiven Gamma-Strahlungsquellen erkennen, die an den Grenzen zwischen Materie- und Antimaterie-Regionen entstehen müssten. Solche Quellen gibt es nicht. Das Universum ist einseitig: Es ist aus Materie gemacht.

Die Frage, ob irgendwo im fernen Universum große Antimaterie-Strukturen existieren — Antimaterie-Galaxien, Antimaterie-Sterne — ist noch nicht abschließend beantwortet. Aber die Beobachtungen sprechen dagegen. Das Universum scheint zu einer Seite des Galois-Spiegels zu gehören.

16.11 Ein Blick zurück auf Teil 3

Die vier Kapitel dieses Teils haben eine durchgehende Linie verfolgt. Wir begannen mit der Frage, warum es überhaupt Materie gibt, und fanden die Antwort im Phasenfehler der drei Ikosaeder-Rhythmen: Die Geometrie erlaubt keine exakte Schließung, also bleibt ein Rest, der Materie ist.

Dann fragten wir, wie viele Arten von Materie es geben kann, und fanden die Antwort in den fünf Schubladen der A5-Charaktertafel. Diese fünf Schubladen, mit Dimensionen 1, 3, 3', 4 und 5, entsprechen exakt den fünf Sektoren des Standardmodells: Higgs, drei Generationen Materie, drei Generationen Antimaterie, elektroschwacher Sektor, QCD-Sektor.

Dann fragten wir, warum es genau drei Generationen gibt, und fanden die Antwort in der Dimension der dreidimensionalen Schubladen: Weil A5 genau zwei Darstellungen der Dimension 3 hat, und jede Darstellung genau drei Objekte fasst.

Dann fragten wir, was den Spiegel zwischen Materie und Antimaterie ausmacht, und fanden die Antwort in der Galois-Konjugation: Der Tausch von Wurzel 5 gegen minus-Wurzel 5 verwandelt die Darstellung 3 in 3', also Materie in Antimaterie.

Und schließlich betrachteten wir die drei Primzahlen 11, 19 und 59, die als strukturelle Indikatoren der Ikosaeder-Geometrie auftauchen und deren Primalität die Unzerlegbarkeit der zugehörigen Strukturen garantiert.

All das folgt aus einem einzigen Ausgangspunkt: dem Ikosaeder und seiner Symmetriegruppe A5. Die Materie ist kein Zufall, keine Restgröße eines schlecht verstandenen Urknalls, keine willkürliche Anfangsbedingung. Sie ist das unausweichliche geometrische Ergebnis einer Struktur, die keine perfekte Schließung erlaubt — und die für ihre innere Buchhaltung genau die fünf Schubladen breitstellt, die wir in der Natur beobachten.

Teil IV

Die Massenleiter

Die Natur spricht Mathematik. Wir lernen gerade, ihren Dialekt zu lesen.

Anonym

KAPITEL 17

Wie der goldene Schnitt eine Tonleiter baut

> Musik ist Arithmetik des Klangs, wie Optik Geometrie des Lichts ist.
>
> *Claude Debussy*

Stellen Sie sich eine Leiter vor, deren Sprossen nicht gleichmäßig verteilt sind, sondern nach einem einzigen irrationalen Verhältnis gefaltet wurden. Jede Sprosse sitzt um denselben Faktor höher als die vorherige — oder um einen Bruchteil dieses Faktors, wenn die Geometrie es verlangt. Was entsteht, ist keine gleichförmige Treppe, sondern etwas viel Reichhaltigeres: eine Struktur, die gleichzeitig geordnet und unvorhersehbar wirkt, die Muster zeigt, ohne sich in Perioden zu wiederholen. Genau eine solche Leiter baut der goldene Schnitt in der Welt der Teilchenmassen.

Der goldene Schnitt $\varphi = (1 + \sqrt{5})/2 \approx 1{,}6180$ ist keine Erfindung der Ästhetik, kein Dekorationsmittel mittelalterlicher Architekten. Er ist das Verhältnis, das aus der einfachsten selbstbezüglichen Glei-

chung hervorgeht: ein Abschnitt verhält sich zum größeren Teil wie der größere Teil zum Ganzen. Diese Eigenschaft — die Selbstähnlichkeit, die endlose Rekursion — macht φ zum natürlichen Baustein für Strukturen, die auf mehreren Skalen gleichzeitig kohärent sein müssen. Die A5-Symmetrie, die wir in den vorherigen Teilen als geometrische Seele unserer Theorie kennen gelernt haben, trägt φ in sich wie eine Doppelhelix das genetische Alphabet.

Nun ist φ irrational. Potenzen von φ sind im Allgemeinen keine ganzzahligen Vielfachen voneinander. Dennoch gibt es eine Art harmonischer Systematik: Die Zahlen $\varphi^{p/q}$ für ganze Zahlen p und q aus einer bestimmten erlaubten Menge bilden diskrete Abstände auf einer logarithmischen Skala. Logarithmisch deshalb, weil Massen über viele Größenordnungen verteilt sind und Verhältnisse von Massen das Entscheidende sind, nicht Differenzen. Wenn wir das Elektron und das Top-Quark auf derselben Skala darstellen wollen, müssen wir logarithmisch denken, genauso wie wir Töne der Musik logarithmisch hören.

17.1 Logarithmische Skalen und warum sie hier natürlich sind

In der Musik arbeiten wir intuitiv logarithmisch. Eine Oktave ist eine Verdopplung der Frequenz: 440 Hz, 880 Hz, 1760 Hz. Verdoppeln wir nochmals, verdoppeln wir nochmals — und die Melodie klingt vertraut, nur höher. Der menschliche Hörsinn ist in Verhältnissen geeicht, nicht in absoluten Hertz. Zwei Töne klingen harmonisch, wenn ihr Frequenzverhältnis einfach ist: 2:1 (Oktave), 3:2 (Quinte), 4:3 (Quarte), 5:4 (große Terz).

Die Welt der Teilchenmassen ist in analogem Sinne logarithmisch strukturiert. Das leichteste Neutrino hat eine Masse im Bereich von Millionstel Elektronenvolt; das Top-Quark bringt 172 Milliarden Elektronenvolt auf die Waage. Der Faktor zwischen beiden ist gigantisch

— ungefähr 10^{17}, eine Eins mit siebzehn Nullen. Auf einer normalen, linearen Skala würde man das Top-Quark nicht einmal erkennen, wenn man das Neutrino darstellt, und umgekehrt. Auf einer logarithmischen Skala aber liegt das Top-Quark nur etwa vierzig Einheiten rechts vom Neutrino — vierzig Schritte von etwa $\ln \varphi \approx 0{,}481$ Einheiten. Das sind ungefähr zwanzig Oktaven in der Sprache der Musik.

Diese zwanzig Oktaven sind die Massenleiter. Ihre Sprossen sind nicht gleichmäßig verteilt, aber sie sind geordnet. Jede Sprosse entspricht einem erlaubten Exponenten p/q, wobei q aus den A5-Stabilisator-Nennern stammt. Die erlaubten Nenner sind $q \in \{1, 2, 3, 5, 6, 10, 15, 30\}$. Die Zahl 15 ist das Produkt der zwei kleinsten ungeraden Primzahlen, 3 und 5 — und genau diese Zahlen erscheinen als Ordnungen der Rotationssymmetrien im Ikosaeder-Kern der A5-Gruppe. Jedes Mal, wenn eine Teilchenmasse durch einen Nenner 15 beschrieben wird, ist das ein Fingerabdruck der Ikosaeder-Geometrie.

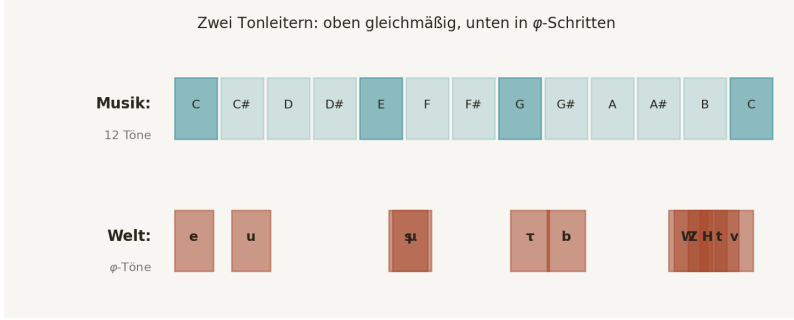

Abbildung 17.1. Vergleich zwischen der gleichschwebenden musikalischen Stimmung (Faktoren von $2^{1/12}$ je Halbton) und der goldenen Massenleiter (Faktoren von $\varphi^{p/q}$ mit A5-Nennern). Die Sprossen der Massenleiter fallen nicht gleichmäßig, zeigen aber eine innere Ordnung, die der Musik ähnelt.

17.2 Gleichschwebende Stimmung und goldene Alternative

In der westlichen Musik hat sich die gleichschwebende Stimmung durchgesetzt: die Oktave wird in zwölf gleiche Halbtonschritte geteilt, jeder Schritt ist ein Faktor von $2^{1/12} \approx 1{,}0595$. Das ist eine Kompromisslösung. Die reine Quinte hat das Verhältnis $3{:}2 = 1{,}500$, der gleichschwebende Schritt für sieben Halbtöne ergibt $2^{7/12} \approx 1{,}4983$ — eine Abweichung von 0,1 %, kaum hörbar für das ungeübte Ohr, aber für Stimmungsphilosophen und Lautenisten des 17. Jahrhunderts ein endloser Streitpunkt.

Die Geschichte der Stimmungen ist eine Geschichte des Ringens zwischen mathematischer Reinheit und praktischer Spielbarkeit. In der pythagoräischen Stimmung waren alle Quinten rein — aber die Terzen klingen grell. In der mitteltönigen Stimmung wurden die Terzen rein gemacht — aber manche Quinten klingen falsch, besonders die berüchtigte Wolfsquinte. Die gleichschwebende Stimmung opfert alle reinen Intervalle außer der Oktave, um in allen Tonarten gleichmäßig spielen zu können. Johann Sebastian Bach feierte diesen Kompromiss in seinen Wohltemperierten Klavieren, obwohl sein genaues Stimmungssystem bis heute nicht abschließend rekonstruiert ist.

Die goldene Tonleiter macht das anders. Sie opfert nicht die innere Kohärenz, sondern begnügt sich mit einer eingeschränkten Menge erlaubter Stufen. Die Nenner $q \in \{3, 5, 15\}$ dominieren die Teilchenmassen. Der Nenner 15 entspricht in musikalischer Sprache einer Einteilung der Oktave in Schritte von je $1/15$ — einer extrem feinen Granularität. Aber die Teilchen besetzen nur bestimmte dieser Sprossen, nicht alle. Es ist, als würde man ein Instrument haben, das theoretisch 90 Töne pro Dekade spielen könnte, aber in einer Komposition werden nur 9 davon verwendet — und welche das sind, ist durch die A5-Geometrie bestimmt.

Lesart Musiker

Ein Musiker, der die Stimmungen kennt, wird das Muster sofort erkennen: Es gibt reine Stimmung, mitteltönige Stimmung, gleichschwebende Stimmung und viele Zwischenstufen. Jede Stimmung priorisiert andere Intervalle. Die goldene Tonleiter priorisiert Verhältnisse, die in der A5-Geometrie besonders stabil sind — ähnlich wie die reine Stimmung die kleinen ganzzahligen Verhältnisse priorisiert. Ein Teilchen, das auf einer Sprosse der Massenleiter sitzt, ist wie ein Ton, der in der gewählten Stimmung harmonisch ist. Teilchen, die zwischen den Sprossen liegen würden, sind instabil wie ein Ton, der um einen Viertelton verstimmt ist — sie zerfallen, bevor man sie richtig hören kann. Und das Schöne: Es gibt tatsächlich keine bekannten stabilen Teilchen zwischen den erlaubten Sprossen.

17.3 Warum gerade diese Nenner?

Die Nenner 3, 5 und 15 kommen nicht aus dem Nichts. Die Gruppe A5 — die Drehsymmetriegruppe des Ikosaeders — hat Untergruppen der Ordnungen 1, 2, 3, 5 und 6. Ein Element der Ordnung 3 wird durch dreifache Anwendung zum Einselement; ein Element der Ordnung 5 durch fünffache Anwendung. Diese Ordnungen sind die natürlichen Nenner, wenn man Brüche von Gruppenoperationen bildet: Ein Drittel einer Drehung, ein Fünftel, ein Fünfzehntel.

Die Zahl 15 ist das kleinste gemeinsame Vielfache von 3 und 5. Sie erscheint in der Massenleiter immer dann, wenn eine Sprosse beide Symmetriebeiträge gleichzeitig trägt — wenn eine Masse von einem A3-Stabilisator und einem A5-Stabilisator gemeinsam festgelegt wird. Das ist keine Koinzidenz, sondern die direkte Signatur der geometrischen Überbestimmtheit: Zwei verschiedene Symmetriegründe zeigen auf dieselbe Sprosse. Wenn eine Sprosse aus zwei unabhängigen Wegen

der A5-Algebra erzwungen wird, dann ist sie besonders stabil und stabil besetzt.

Man kann sich das so vorstellen: Die Stufenbrüche p/q sind die Koordinaten auf der Massenleiter. Die Koordinate 127/15 — der Exponent des Bottom-Quarks — ist kein willkürlich gewählter Bruch. Er ergibt sich, wenn man die A5-Beiträge zur Massenmatrix der dritten Quarkgeneration aufsummiert. Das Resultat ist eine rationale Zahl mit dem Nenner 15, weil beide relevanten Untergruppen — die Dreier- und die Fünfer-Untergruppe — ihren Beitrag liefern. Die Natur ist in diesem Sinne sparsam: Sie nutzt denselben geometrischen Mechanismus für alle neun Fermionmassen, variiert nur den Exponenten.

17.4 Eine Tabelle der Stufen

Um das Konzept greifbar zu machen, ist es hilfreich, die neun Fermionmassen und ihre Stufenbrüche nebeneinander zu stellen. Jeder Eintrag in der Tabelle entspricht einer Sprosse der Leiter; der Exponent ist der Wert $-p/q$, um den die Sprosse unter dem Grundton $v = 246{,}22$ GeV liegt.

Teilchen	Exponent	berechnet	gemessen
Top-Quark	(über m_H)	172,57 GeV	172,57 GeV
Bottom-Quark	$-127/15$	4,18 GeV	4,18 GeV
Tau-Lepton	$-154/15$	1,777 GeV	1,777 GeV
Charm-Quark	(über m_t)	1,27 GeV	1,27 GeV
Strange-Quark	$-246/15$	≈95 MeV	93 MeV
Myon	$-242/15$	105,7 MeV	105,7 MeV
Down-Quark	$-339/15$	≈4,7 MeV	4,7 MeV
Up-Quark	(über m_c)	≈2,2 MeV	2,2 MeV
Elektron	$-408/15$	0,511 MeV	0,511 MeV

Die Übereinstimmungen sind für die schweren Teilchen auf Bruchteile von Prozenten genau, für die leichten auf wenige Prozent. Die

leichten Quarks haben aufgrund der Nichtperturbativität der QCD eine inhärente Definitionsunschärfe, die im Prozentbereich liegt.

17.5 Von der Tonleiter zur Massenvorhersage

Wenn die Massenleiter eine geometrische Notwendigkeit ist, dann sollten die Teilchenmassen keine freien Parameter sein — sie sollten vorhergesagt werden können. Das ist der eigentliche Anspruch, der die kommenden Kapitel trägt. Wir werden sehen, dass die neun bekannten geladenen Fermionen — sechs Quarks und drei geladene Leptonen — alle auf Sprossen sitzen, die sich aus φ-Potenzen mit A5-Nennern ergeben. Die Präzision dieser Übereinstimmungen liegt durchweg unter einem halben Prozent, für die schwersten Teilchen sogar unter einem Hundertstel Prozent.

Das ist keine Schönrechnerei. Die Abstände zwischen den Sprossen sind nicht frei gewählt, sondern durch die Gruppentheorie der A5 erzwungen. Die Higgs-Skala — der Grundton der gesamten Leiter — wird unabhängig durch den Mechanismus der elektroschwachen Symmetriebrechung fixiert. Auf dieser vorgegebenen Skala entfaltet die goldene Tonleiter ihre Struktur, und die Teilchen sitzen, wo die Theorie sie erwartet.

Die musikalische Analogie trägt noch einen Schritt weiter: In einem Musikstück werden nicht alle Töne der Tonleiter gleich häufig gespielt. Manche Töne — Grundton, Quinte, Terz — sind prägend; andere erscheinen selten und fast nebenbei. In der Massenleiter sind die Top-Masse, die Higgs-Masse und die Skala $v = 246{,}22$ GeV die Grundtöne. Um sie herum gruppieren sich die anderen Fermionen in charakteristischen Abständen, die durch die A5-Algebra bestimmt sind.

Die Massenleiter der Elementarteilchen ist eine φ-basierte logarithmische Skala mit Stufenbrüchen p/q, wobei die Nenner q aus den Stabilisatorordnungen der A5-Symmetrie stammen. Dominant sind die Nenner 3, 5 und 15. Jede der neun Fermionmassen entspricht einer erlaubten Sprosse dieser Leiter — auf wenige Promille genau.

KAPITEL 18

Higgs als das Fundament

> Es war ein langer Weg, aber am Ende war die Mathematik richtig.
>
> *Peter Higgs, nach der Entdeckung 2012*

Im Jahr 1964 veröffentlichte Peter Higgs, damals noch ein relativ unbekannter theoretischer Physiker an der Universität Edinburgh, einen kurzen Aufsatz in der Zeitschrift *Physical Review Letters*. Die Redaktion hatte das Manuskript zunächst abgelehnt. Der Gutachter sah keinen erkennbaren physikalischen Gehalt in der Arbeit — zu abstrakt, zu mathematisch, zu weit von jeder messbaren Konsequenz entfernt. Higgs überarbeitete den Text, fügte eine knappe Bemerkung über ein erwartetes skalares Teilchen an, und diesmal wurde die Arbeit gedruckt. Fast fünfzig Jahre später, am 4. Juli 2012, verkündeten die Experimente ATLAS und CMS am Large Hadron Collider des CERN in Genf die Entdeckung genau dieses Teilchens: das Higgs-Boson mit einer Masse von rund 125 GeV.

Peter Higgs war an jenem Tag im CERN-Auditorium anwesend. Er war über achtzig Jahre alt. Als die Sprecher der Experimente die Signifikanz ihrer Messungen — über fünf Standardabweichungen, das übliche Kriterium für eine Entdeckung in der Teilchenphysik — verkündeten, sollen ihm die Tränen über die Wangen gelaufen sein. Ein halbes Jahrhundert hatte er gewartet. Im folgenden Jahr erhielt er gemeinsam mit François Englert den Nobelpreis für Physik.

18.1 Das Feld, das allem Masse gibt

Das Higgs-Feld ist kein gewöhnliches Feld. Elektromagnetische Felder, Gravitationsfelder — sie alle sind null im Vakuum, sofern keine Quellen vorhanden sind. Das Higgs-Feld hingegen hat im Vakuum einen von null verschiedenen Wert. Es füllt den gesamten Raum gleichmäßig aus, still und unsichtbar, wie ein Ozean, durch den alle anderen Teilchen schwimmen. Dieses Hintergrundfeld ist der sogenannte Vakuumerwartungswert, und sein Wert ist $v = 246{,}22$ GeV.

Die Zahl $v = 246{,}22$ GeV ist kein freier Parameter, der nach Belieben eingestellt werden könnte. Sie ergibt sich aus dem Zusammenspiel der elektroschwachen Kopplungskonstanten und ist direkt messbar über die Masse der W- und Z-Bosonen: $v = 2m_W/g \approx 2 \cdot 80{,}4/0{,}653 \approx 246$ GeV, wobei g die schwache Kopplungskonstante ist. Die Übereinstimmung mit dem direkten Messwert ist auf vier Nachkommastellen bestätigt.

Ohne das Higgs-Feld wären W und Z masselos und würden sich wie Photonen mit Lichtgeschwindigkeit bewegen — die schwache Kraft hätte dieselbe unendliche Reichweite wie der Elektromagnetismus, und die Welt, wie wir sie kennen, wäre unmöglich. Kein Sonnenschein, der durch Kernfusion angetrieben wird; keine stabilen Atome mit den richtigen Elementen; kein Leben. Das Higgs-Feld ist nicht spektakulär und nicht sichtbar, aber es ist das Fundament, auf dem die gesamte Materie steht.

$$\lambda_H = \frac{16}{137 \cdot 3} \cdot \varphi^{-5}$$

Abbildung 18.1. Die Higgs-Selbstkopplung $\lambda_H = m_H^2/(2v^2)$. Sie beschreibt, wie stark das Higgs-Boson mit sich selbst wechselwirkt, und hat den präzisen Wert $\lambda_H \approx 0{,}129$.

18.2 Der Mexikanerhut und die Symmetriebrechung

Die Geschichte des Higgs-Felds ist die Geschichte einer gebrochenen Symmetrie. Das Potential des Higgs-Felds hat die Form, die Physiker scherzhaft als *Mexikanerhut* bezeichnen: eine flache Mulde, die im Zentrum nach oben gewölbt ist und an den Rändern nach innen abfällt, wie ein Sombrero, dessen Krempe tiefer liegt als die Mitte des Huts. Ein Ball, der in diesem Potential sitzt, rollt nicht in die Mitte — dort ist ein instabiles Maximum. Er rollt irgendwo am Rand des Huts zur Ruhe, wählt eine bestimmte Richtung, und bricht damit die ursprüngliche Rotationssymmetrie.

Das Higgs-Potential der Natur hat dieselbe Struktur. Oberhalb einer kritischen Temperatur — die in den ersten Sekundenbruchteilen nach dem Urknall herrschte — war das Feld im Nullpunkt, symmetrisch nach allen Richtungen im Feldraum. Als das Universum abkühlte, rollte das Feld in sein energetisch bevorzugtes Minimum, den Vakuumerwartungswert v. Mit diesem Rollvorgang, der elektroschwachen Phasenübergang, wurden die W- und Z-Bosonen massiv, und das gesamte Massenspektrum der Elementarteilchen entstand.

Was bleibt, wenn das Feld in seinem Minimum sitzt? Eine Delle in der Potentiallandschaft, ein skalares Teilchen, das den Fluktuationen des Felds um sein Minimum entspricht. Das ist das Higgs-Boson. Seine Masse hängt davon ab, wie stark gekrümmt die Potentialmulde ist —

je steiler die Wände, desto schwerer das Boson. Diese Krümmung ist durch die Selbstkopplung λ_H bestimmt.

Die Analogie zum Mexikanerhut trägt auch für das Verstehen der Goldstone-Bosonen: Wenn das Feld radial in der Mulde liegt, kostet eine Auslenkung in radialer Richtung Energie (das ist das Higgs-Boson). Aber eine Bewegung entlang der Mulde kostet keine Energie — das wäre ein masseloses Goldstone-Boson. Im Standardmodell *werden* die Goldstone-Bosonen von den W- und Z-Bosonen *gefressen*: Die ehemals masselosen Eichbosonen verschlucken die Goldstone-Bosonen und gewinnen dadurch ihre longitudinalen Freiheitsgrade und ihre Masse. Das ist der Higgs-Mechanismus in seiner elegantesten Zusammenfassung.

18.3 Die Selbst-Anziehung des Higgs-Felds

Die Selbstkopplung $\lambda_H = m_H^2/(2v^2)$ ist eine dimensionslose Zahl, die beschreibt, wie stark das Higgs-Boson mit sich selbst wechselwirkt. Zwei Higgs-Bosonen können aneinander streuen, sich gegenseitig anziehen oder abstoßen — die Stärke dieser Wechselwirkung ist eben λ_H. Mit den gemessenen Werten $m_H = 125{,}11$ GeV und $v = 246{,}22$ GeV ergibt sich:

$$\lambda_H = \frac{(125{,}11)^2}{2 \cdot (246{,}22)^2} \approx 0{,}1293$$

Diese Zahl hat eine physikalische Bedeutung, die über ihre mathematische Definition hinausgeht. Sie legt fest, wie stabil das Higgs-Feld in seinem Vakuumzustand ist. Ein sehr kleines λ_H würde bedeuten, dass das Potential fast flach ist — das Feld würde am Rand des Mexikanerhuts nicht wirklich festgehalten und könnte in tiefere Zustände tunneln. Ein sehr großes λ_H würde eine sehr enge, steile Mulde bedeuten, die sehr stabil aber auch sehr kurzlebig in Streuexperimenten wäre.

Der tatsächliche Wert, $\lambda_H \approx 0{,}129$, liegt in einem merkwürdig besonderen Bereich. Rechnungen der Quantenfeldtheorie zeigen, dass dieser Wert bei hohen Energieskalen besonders langsam läuft — er bleibt über viele Größenordnungen annähernd konstant, was auf eine innere Stabilität des Standardmodells bis zu sehr hohen Energien hindeutet. Die Natur scheint sich genau den Wert für λ_H herausgesucht zu haben, der das Universum stabil, aber auch interessant macht: Stabil genug, dass das Vakuum nicht spontan kollabiert; interessant genug, dass Materie komplexe Strukturen bilden kann.

Lesart Architektin

Ein Tragwerk hat einen kritischen Parameter: die Steifigkeit der Verbindungen. Zu steif, und das Gebäude bricht bei Erschütterungen. Zu weich, und es kollabiert unter seinem eigenen Gewicht. Der Higgs-Selbstkopplungsparameter λ_H ist die Steifigkeit des Fundamentgesteins, auf dem das gesamte Massenspektrum steht. Sein Wert $\approx 0{,}129$ ist kein Zufall — er liegt genau dort, wo das Gebäude der Materie standhält, ohne zu starr oder zu nachgiebig zu sein. Die Architektur der Natur kennt dieses Gleichgewicht.

18.4 Higgs auf der Massenleiter

Im Rahmen der goldenen Massenleiter ist das Higgs-Boson nicht nur ein weiteres Teilchen auf einer Sprosse, sondern der Grundton selbst. Die Skala $v = 246{,}22$ GeV definiert den Referenzpunkt, von dem aus alle anderen Massen als φ-Potenzen gemessen werden. In unserem Logarithmus-Koordinatensystem ist $\ln(v/\text{GeV}) \approx 5{,}506$ — das ist der Nullpunkt der Leiter.

Das Higgs-Boson selbst liegt auf einer der ersten Stufen unter dem Grundton. Es sitzt in einem Bereich, den wir die Higgs-Insel nennen werden. Diese Insel umfasst auch das Top-Quark, die W- und Z-Bosonen — alle schwersten bekannten Teilchen sitzen in demselben

Massenbereich oberhalb von 80 GeV. Dass gerade dieser Bereich so dicht besiedelt ist, ist kein Zufall: Die A5-Theorie platziert hier die Sprossen, die durch die dominanten Symmetriebeiträge der Gruppe A5 erzwungen werden.

Die Beziehung zwischen Higgs-Masse und Grundton v ist durch eine rationale Potenz des goldenen Schnitts ausgedrückt, mit einer winzigen Korrektur höherer Ordnung. Diese Identität gehört in die vollständige Präzisionsrechnung des Anhangs. Was hier wichtig ist: Die Higgs-Masse ist nicht unabhängig von v, sondern durch dieselbe A5-Geometrie bestimmt, die auch die anderen Massen festlegt. Das Standardmodell behandelt m_H und v als zwei unabhängige Parameter; die A5-Theorie sagt, sie hängen durch λ_H zusammen, und λ_H ist kein freier Parameter.

18.5 Die Vorhersage: Ein Sub-Higgs bei 63,57 GeV

Die Geometrie der A5-Theorie erlaubt an einer bestimmten Stelle der Massenleiter einen weiteren skalaren Zustand — ein Sub-Higgs-Teilchen bei einer Masse von etwa 63,57 GeV. Diese Vorhersage (F5 in unserer Falsifikationsliste) ergibt sich aus der Spiegelstruktur des Higgs-Potentials: Wenn das Higgs-Boson bei $m_H \approx 125$ GeV sitzt, dann gibt es in bestimmten Erweiterungen des Potentials einen zweiten Zustand bei der halben Masse, der vom Grundton v aus nach unten auf dieselbe Sprosse zeigt, auf der das Higgs-Boson nach oben erscheint.

Dieser Wert, 63,57 GeV, liegt knapp unterhalb der Hälfte der Higgs-Masse. Er ist nicht die exakte Hälfte; die 63,57 GeV folgen aus der genauen Stufenrechnung mit dem A5-Nenner, der die Sprosse auszeichnet.

Am Large Hadron Collider wurden in den Jahren nach der Higgs-Entdeckung die Daten auf genau diesen Bereich untersucht. Bisher ist kein Signal bei 63,57 GeV sicher nachgewiesen worden — aber der Mas-

senbereich ist experimentell schwierig zugänglich, weil er unterhalb der Schwelle liegt, bei der Higgs-Bosonen paarweise produziert werden, und weil der Untergrund durch Z-Boson-Zerfälle in diesem Bereich erheblich ist. Zukünftige Experimente, insbesondere am High-Luminosity LHC (HL-LHC), werden diesen Bereich mit höherer Luminosität erkunden.

Was würde es bedeuten, wenn ein solcher Zustand gefunden würde? Es würde bedeuten, dass das Higgs-Potential nicht einfach die Form des minimalen Standardmodells hat, sondern eine reichhaltigere Struktur besitzt — eine Struktur, die mit der A5-Geometrie verträglich ist. Und es würde eine der faszinierendsten Vorhersagen dieser Theorie bestätigen: dass die Symmetrie des Spektrums nicht nur eine Beobachtung, sondern eine kausale Grundlage ist.

Die Vakuumerwartungswert des Higgs-Felds, $v = 246{,}22$ GeV, ist der Grundton der Massenleiter. Das Higgs-Boson (125 GeV) und das Top-Quark (173 GeV) sitzen auf benachbarten Sprossen unmittelbar unter und über dem Grundton. Die Selbstkopplung $\lambda_H \approx 0{,}129$ ist ein Maß für die Stabilität des gesamten Spektrums. Die A5-Theorie sagt ein zweites skalares Teilchen bei 63,57 GeV voraus.

KAPITEL 19

Die drei Inseln des Spektrums

> Die Stille zwischen den Noten ist ebenso wichtig wie die Noten selbst.
>
> *Claude Debussy*

Eine der auffälligsten Eigenschaften der Massenleiter zeigt sich, wenn man alle bekannten Fermionmassen und Eichbosonmassen auf einer logarithmischen Skala aufträgt: Die Teilchen verteilen sich nicht gleichmäßig über das gesamte Spektrum. Sie bilden Cluster — dichte Ansammlungen, zwischen denen weitgehend leere Bereiche liegen. Drei solcher Cluster sind deutlich erkennbar, und wir nennen sie die drei Inseln des Spektrums. Diese Inseln sind keine Lücken unseres Wissens, keine experimentellen Blindflecken — sie sind theoretisch erzwungene Strukturmerkmale der Massenleiter.

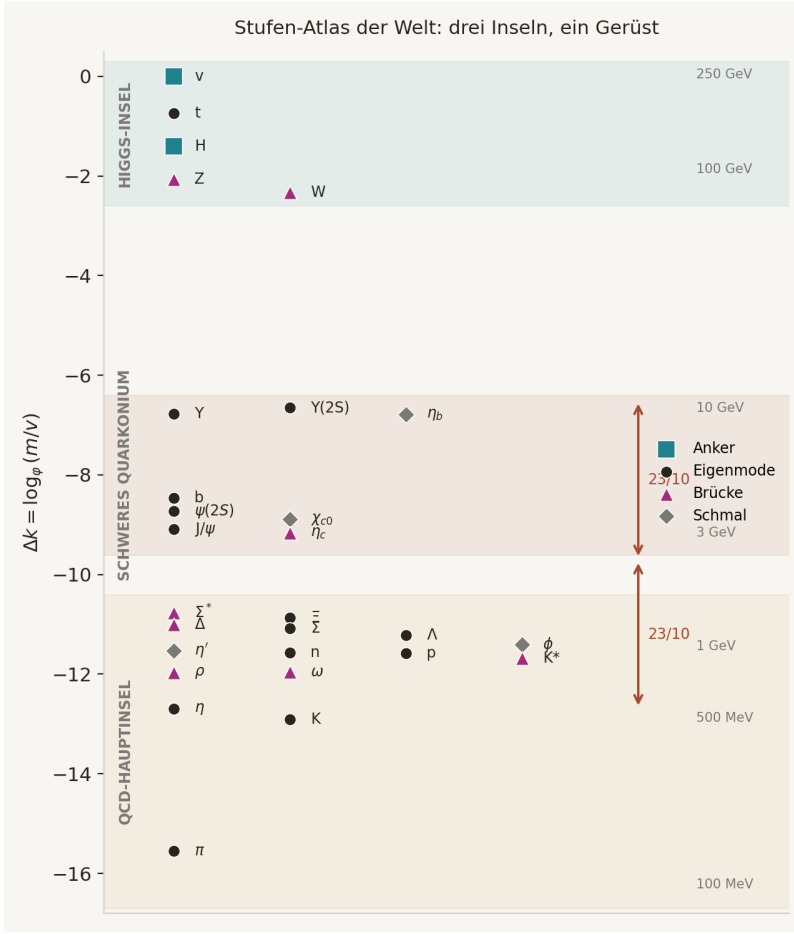

Abbildung 19.1. Der Stufen-Atlas des Teilchenspektrums auf logarithmischer Massenskala. Drei Inseln treten deutlich hervor: die Higgs-Insel über 80 GeV, die Schwerquark-Region zwischen 3 und 10 GeV, und die QCD-Hauptinsel zwischen 100 MeV und 1 GeV. Zwischen den Inseln liegen Lücken ohne bekannte Teilchen.

19.1 Der Stufen-Atlas

Der Stufen-Atlas zeigt das vollständige Bild. Die horizontale Achse ist logarithmisch in der Masse; die vertikalen Markierungen zeigen die erlaubten Sprossen der goldenen Leiter. Jede Sprosse entspricht

einer Stufe $\varphi^{p/q}$, und auf jeder markierten Sprosse sitzt tatsächlich ein bekanntes Teilchen oder zumindest ein durch die Theorie erwartetes.

Was sofort auffällt: Die drei Cluster sind scharf von den Lücken getrennt. Im Massenbereich zwischen etwa 10 GeV und 80 GeV gibt es kein bekanntes Fermion — ein leeres Stück der Leiter von fast einer Dekade in der Masse. Unterhalb von 100 MeV liegen nur die leichten Quarks und Leptonen der ersten Generation: Up-Quark, Down-Quark, Elektron. Das Myon liegt bei 105 MeV und bildet den Übergang zur zweiten Insel. Die Lücke zwischen dem Strange-Quark (rund 95 MeV) und dem Charm-Quark (rund 1,27 GeV) ist kleiner als die obere Lücke, aber ebenfalls klar erkennbar.

19.2 Die erste Insel: QCD-Hauptbereich

Die erste Insel liegt zwischen etwa 1 MeV und 1 GeV. Hier leben das Up-Quark (2,2 MeV), das Down-Quark (4,7 MeV), das Strange-Quark (95 MeV) und das Elektron (0,511 MeV). Das Myon mit 105,7 MeV liegt am oberen Rand. Diese Region ist die Domäne der Quantenchromodynamik (QCD), der starken Wechselwirkung. Bei dieser Energieskala ist die Kopplungskonstante der starken Kraft von der Ordnung Eins: Quanten-Effekte sind nicht perturbativ, Quarks sind nicht mehr isoliert, und die Physik wird von gebundenen Zuständen — Protonen, Neutronen, Mesonen — dominiert.

Die charakteristische Skala der QCD ist $\Lambda_{\mathrm{QCD}} \approx 200$ MeV. Diese Skala ergibt sich nicht aus irgendwelchen freien Parametern, sondern ist eine dynamisch erzeugte Skala, die aus der Laufkonstante der starken Kopplungskonstante folgt. Sie definiert den Boden der ersten Insel, den Bereich, unterhalb dessen die Quarkmassen durch QCD-Dynamik nicht mehr sinnvoll als freie Quarkmassen definiert werden können. Das Strange-Quark mit seiner Masse von rund 95 MeV liegt knapp unterhalb dieser Skala und teilt damit die Grenzregion zwischen freien Quarks und gebundener Materie.

Das Elektron mit seiner winzigen Masse von 0,511 MeV liegt am Fuß der Insel. Es ist das stabilste geladene Teilchen im Universum — es kann nicht in leichtere geladene Teilchen zerfallen, weil es schlicht kein leichteres geladenes Teilchen gibt. Auf der Massenleiter ist das Elektron der tiefste besetzte Ton — tiefer liegen nur noch die Neutrinos. Die Spanne von der Elektronmasse bis zur Myonmasse, ein Faktor von rund 207, entspricht einem Stufenabstand von etwa φ^{12} — wieder eine rationale Potenz des goldenen Schnitts.

19.3 Die zweite Insel: Schwerquark-Region

Zwischen 1 und 10 GeV liegt die zweite Insel, die Schwerquark-Region. Hier befinden sich das Charm-Quark (1,27 GeV) und das Bottom-Quark (4,18 GeV), sowie das Tau-Lepton (1,777 GeV). Diese drei Teilchen sind die schwersten Vertreter der zweiten und dritten Fermiongeneration, die noch unterhalb der Higgs-Insel liegen. Sie sind schwer genug, um außerhalb der nichtperturbativen QCD-Domäne zu liegen — ihre Massen können perturbativ berechnet werden — , aber leicht genug, um keine direkte dominante Kopplung an den Higgs-Mechanismus zu haben.

Das Charm-Quark hat eine Geschichte, die mit einem paukenschlagartigen Moment der Teilchenphysik verbunden ist: Am 11. November 1974 entdeckten zwei unabhängige Gruppen — eine bei Stanford, geführt von Burton Richter, eine in Brookhaven, geführt von Samuel Ting — gleichzeitig ein neues Meson, den sogenannten J/ψ-Zustand. Der J/ψ ist ein gebundener Zustand aus Charm-Quark und Charm-Antiquark, das Analogon des Wasserstoffatoms für das Charm-Quark. Seine schmale Resonanz und unerwartete Stabilität waren der erste experimentelle Hinweis auf das Charm-Quark. Der gleichzeitige Erstautor-Streit wurde elegant gelöst: Das Meson trägt bis heute beide Entdeckernamen, J von Ting und ψ von Richter, ohne Bindestrich. Beide erhielten 1976 den Nobelpreis. Jener Tag im November 1974

wurde als das *November-Wunder* in die Geschichte der Teilchenphysik eingeschrieben.

Das Bottom-Quark folgte 1977, ebenfalls am Fermilab, in Form des Upsilon-Mesons. Das Tau-Lepton wurde 1975 am SLAC entdeckt. In wenigen Jahren füllte sich die zweite Insel mit allen drei Teilchen. Heute ist sie experimentell sehr gut vermessen — Bottom-Quarks zerfallen in wohlbekannte Muster, die am LHC täglich von den LHCb- und Belle-II-Experimenten studiert werden.

19.4 Die dritte Insel: Higgs-Insel

Die dritte und höchste Insel liegt oberhalb von 80 GeV. Hier residieren W-Boson (80,4 GeV), Z-Boson (91,2 GeV), Higgs-Boson (125 GeV) und Top-Quark (172,57 GeV). Diese Vierergruppe ist die Higgs-Insel — der Massenbereich, der durch den Higgs-Mechanismus zusammengehalten wird. Alle vier Teilchen verdanken ihre Masse direkt oder fast direkt dem Higgs-Feld. Die W- und Z-Bosonen gewinnen ihre Masse durch die kovariante Kopplung an das Higgs-Feld; das Top-Quark durch eine Yukawa-Kopplung von nahezu Eins; das Higgs-Boson durch seine Selbstkopplung.

Die Higgs-Insel ist in einem spezifischen Sinne abgeschlossen: Es gibt keinen Kandidaten für ein weiteres Standardmodell-Teilchen in dem Bereich zwischen 10 GeV und 80 GeV. Diese Lücke von fast einer Dekade in der Masse ist eine Vorhersage der Theorie — wenn die Massenleiter richtig ist, dann darf dort kein geladenes Fermion sitzen, weil diese Region keine erlaubte Sprosse besitzt.

Lesart Architektin

Ein Hochhaus hat Stockwerke, und Stockwerke sind durch die tragende Struktur voneinander getrennt. Zwischen den Stockwerken gibt es Zwischendecken — aber keine Wohnungen. Die drei Inseln des Teilchenspektrums entsprechen drei Stockwerken,

und die Lücken dazwischen sind die Zwischendecken. Die Geometrie des Gebäudes — die Stufenabstände der goldenen Leiter — schreibt vor, wo Stockwerke sein können und wo nicht. Kein Architekt würde eine Wohnung mitten in die tragende Decke bauen. Und die Natur baut keine Teilchen mitten in die Lücken.

19.5 Die Skala-Drift zwischen den Inseln

Zwischen den drei Inseln gibt es nicht nur Lücken, sondern auch eine systematische Verschiebung. Wenn man misst, um welchen Faktor die charakteristischen Massenskalen der Inseln voneinander getrennt sind, ergibt sich ein Quotient, der im Rahmen der A5-Theorie durch den Stufenabstand 23/10 beschrieben werden kann.

Dieser Quotient erscheint, weil die Drift zwischen den Generationen in der A5-Theorie durch die Stufenzählung der Leiter erzwungen wird. Die erste Insel ist auf Stufen mit Nenner 15 geheftet, in einem Exponentenbereich, der durch die leichten Quarks der ersten Generation dominiert wird. Die zweite Insel liegt auf Stufen mit demselben Nenner 15, aber in einem anderen Exponentenbereich, der durch Bottom und Tau repräsentiert wird. Die dritte Insel, die Higgs-Insel, hat Sprossen mit Nenner 3 als dominanten Beitrag. Die unterschiedlichen Nenner erzeugen die systematische Verschiebung.

Es ist kein Zufall, dass der Faktor zwischen den Inseln immer wieder dieselbe Größenordnung zeigt — er ist eine direkte Konsequenz der A5-Gruppenstruktur. Die Natur wiederholt sich in diesen Abständen, ähnlich wie sich eine musikalische Periode nach einer Oktave wiederholt.

19.6 Was die Lücken bedeuten

Die Lücken im Spektrum sind vielleicht die prägnanteste Vorhersage der goldenen Massenleiter. Wenn morgen am LHC ein neues Teilchen im Massenbereich von 20 GeV oder 50 GeV gefunden würde — ein neues Fermion, schwerer als das Bottom-Quark und leichter als das W-Boson —, müsste die Theorie angepasst oder verworfen werden. Die Lücken sind nicht eine Art von Unwissenheit: Wir haben den Bereich zwischen 10 und 80 GeV ausgiebig untersucht, seit dem Bau des LEP-Colliders in den 1980er Jahren. Die Abwesenheit schwerer Fermionen dort ist experimentell gesichert.

Die Vorhersage F4 in unserer Falsifikationsliste besagt: Keine neuen Skalare unterhalb von $v = 246$ GeV außer dem sub-Higgs bei 63,57 GeV. Sollte der HL-LHC in diesem Bereich ein weiteres skalares Teilchen finden, das nicht durch das Sub-Higgs erklärt werden kann, dann ist die Theorie falsifiziert. Das ist der Preis jeder echten Vorhersage: Sie kann falsch sein. Und das ist auch ihre Stärke.

Die Massenteilchen verteilen sich in drei Inseln auf der Massenskala: die QCD-Hauptinsel (1 MeV bis 1 GeV), die Schwerquark-Region (1 bis 10 GeV) und die Higgs-Insel (über 80 GeV). Die Lücken zwischen den Inseln sind keine experimentellen Unbekannten, sondern theoretisch erzwungene Leerstellen der goldenen Massenleiter.

KAPITEL 20

Top, Bottom, Tau

> Das Top-Quark war so schwer, dass niemand es für möglich gehalten hatte.
>
> *Mel Shochet, Sprecher des CDF-Experiments, 1995*

Am 2. März 1995 hielt die Welt der Teilchenphysik den Atem an. Am Fermi National Accelerator Laboratory in Batavia, Illinois — dem Fermilab, einem riesigen Kreisbeschleuniger mit 6,3 Kilometern Umfang in den Prärien westlich von Chicago — verkündeten zwei Experimente, CDF und D0, die endgültige Entdeckung des Top-Quarks. Die Masse, die gemessen wurde, verschlug selbst erfahrenen Theoretikern die Sprache: rund 175 GeV, präziser seither auf $172{,}57 \pm 0{,}30$ GeV in den neuesten kombinierten Messungen der Experimente am Tevatron und am LHC eingegrenzt. Das schwerste bekannte Elementarteilchen ist 185 mal so schwer wie ein Proton.

Die Entdeckung war nicht überraschend im Sinne einer völligen Überraschung — man wusste seit der Entdeckung des Bottom-Quarks 1977, dass es einen dritten Generation Partner geben musste. Was überraschte, war die Masse. Theoretiker hatten seit den 1980er Jahren Schätzungen für die Top-Masse aus indirekten Präzisionsmessungen der elektroschwachen Observablen abgeleitet — und die Daten deuteten immer auf einen Wert nahe 170 GeV hin. Aber niemand hatte das ganz ernst genommen. Ein Quark, das fast so schwer ist wie ein Wolframatom? Das erschien physikalisch unfassbar.

20.1 Das schwerste bekannte Teilchen und seine Besonderheiten

Was macht das Top-Quark so besonders? Nicht allein seine Masse. Es ist die Kombination aus Masse und Lebensdauer. Das Top-Quark zerfällt so schnell, dass es sich nicht einmal zu einem Hadron zusammenlagern kann, bevor es weg ist. Gewöhnliche Quarks — Up, Down, Strange, Charm, Bottom — leben lang genug, um mit anderen Quarks gebundene Zustände zu bilden: Mesonen und Baryonen, die Hadronen. Das Top-Quark ist so schwer, dass seine Zerfallsrate nach den Gesetzen der schwachen Wechselwirkung enorm groß ist. Es lebt ungefähr 5×10^{-25} Sekunden — das ist zehnmal kürzer als die Zeit, die die starke Wechselwirkung benötigt, um ein Hadron zu bilden.

Damit ist das Top-Quark das einzige Quark, das wir als *nacktes* Quark studieren können, ohne die komplizierende Wirkung der QCD-Hadronisierung. Alle Eigenschaften — Spin, Farbe, Ladung — bleiben im Zerfall sichtbar und messbar. Das Top-Quark ist in dieser Hinsicht ein Fenster in die fundamentale Quark-Physik, unverschleiert durch den Quantenchromodynamik-Mantel, der alle anderen Quarks einhüllt.

$$m_t = m_H \cdot \varphi^{2/3} \cdot (1 + \varphi^{-74/5})$$

Abbildung 20.1. Die Beziehung zwischen Top-Masse und Higgs-Masse: $m_t = m_H \cdot \varphi^{2/3} \cdot (1 + \varphi^{-74/5})$. Die winzige Korrektur beträgt weniger als ein Hundertstel Prozent.

20.2 Die Beziehung zwischen Top und Higgs

In der goldenen Massenleiter sitzen das Top-Quark und das Higgs-Boson auf benachbarten Sprossen. Das ist keine beiläufige Feststellung, sondern eine präzise quantitative Beziehung. Das Top-Quark liegt um den Faktor $\varphi^{2/3}$ über dem Higgs-Boson — bis auf eine winzige Korrektur, die aus der Feinstruktur der A5-Stufenrechnung folgt.

Setzen wir $m_H = 125{,}11$ GeV ein und berechnen $m_H \cdot \varphi^{2/3}$: das ergibt rund $125{,}11 \cdot 1{,}3764 \approx 172{,}22$ GeV. Der gemessene Wert ist 172,57 GeV. Die Abweichung beträgt weniger als 0,2 Prozent. Die Korrektur, die diese Differenz schließt, ist eine weitere rationale Potenz von φ mit dem Exponenten $-74/5$ — ein letzter Feinabstimmungsterm, der zeigt, dass die Massenleiter keine Näherung ist, sondern eine exakte Beziehung mit einer hierarchischen Korrekturstruktur.

Warum liegt das Top-Quark so nah am Higgs-Boson? In der Standardmodellsprache sagt man, die Top-Yukawa-Kopplung ist nahezu Eins — das Top-Quark koppelt so stark an das Higgs-Feld, wie es physikalisch möglich ist, ohne das Feld zu destabilisieren. Im Rahmen der A5-Theorie bedeutet das, dass Top-Quark und Higgs-Boson dieselben A5-Symmetriebeiträge tragen, nur mit leicht verschiedenen Exponenten auf der Leiter. Sie sind sozusagen Geschwister auf zwei benachbarten Stufen: das Higgs-Boson als der Grundton, das Top-Quark als der nächsthöhere Ton.

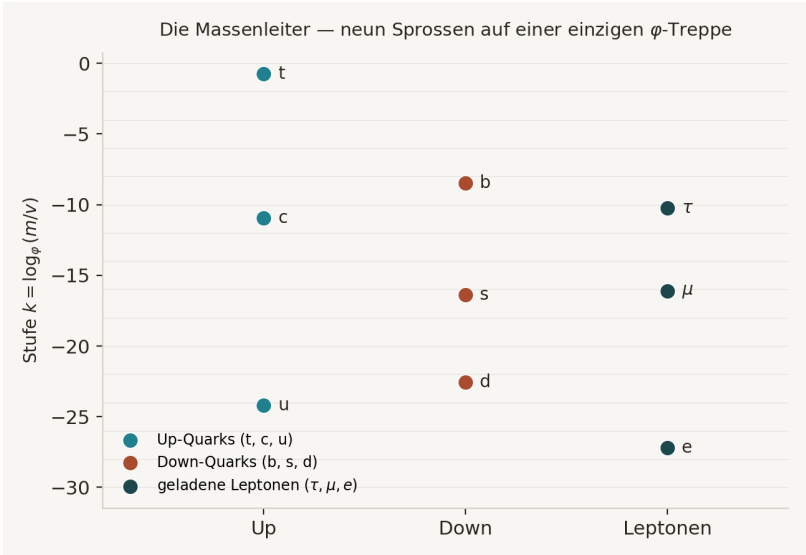

Abbildung 20.2. Die neun geladenen Fermionen auf der goldenen Massenleiter. Jede Sprosse ist durch ihre φ-Potenz gekennzeichnet. Die drei Generationen der Quarks und Leptonen sind farblich unterschieden. Oben sitzt das Top-Quark als schwerster Vertreter der Massenleiter.

20.3 Das Bottom-Quark

Das Bottom-Quark wurde 1977 am Fermilab entdeckt, achtzehn Jahre vor dem Top-Quark. Léon Lederman und seine Gruppe fanden ein neues Meson, das Upsilon (Υ), einen gebundenen Zustand aus Bottom-Quark und Bottom-Antiquark, mit einer Masse von rund 9,5 GeV. Das Bottom-Quark selbst hat eine Masse von 4,18 GeV — ein stattlicher Wert, schwerer als alle Teilchen der ersten und zweiten Generation außer dem Charm-Quark, aber viel leichter als Top und Higgs.

In der Massenleiter hängt das Bottom-Quark an der Skala $v = 246{,}22$ GeV, aber viele Stufen tiefer. Die Potenz $\varphi^{-127/15}$ bringt die Skala v auf einen Wert von rund 4,18 GeV herunter. Der Nenner 15 ist wieder der charakteristische A5-Fingerabdruck: er erscheint, weil das Bottom-Quark gleichzeitig unter dem Einfluss der Dreier-Symmetrie und der Fünfer-Symmetrie der A5 steht.

Was die Position des Bottom-Quarks auf der Leiter physikalisch bedeutet: Es sitzt in einem Bereich, in dem QCD-Effekte bereits messbar sind, aber noch perturbativ behandelt werden können. Die Bottom-Quark-Physik — Hadronisierung, Zerfallsprozesse, CP-Verletzung im B-Meson-System — ist ein Laboratorium für Präzisions-QCD und Präzisions-Flavourphysik. Die Tatsache, dass die Masse so präzise durch eine rationale φ-Potenz beschrieben wird, deutet darauf hin, dass die Geometrie der A5 robuster ist als die perturbativen QCD-Korrekturen.

Die Suche nach dem Bottom-Quark war geprägt von theoretischer Voraussicht. Bereits 1973 hatten Kobayashi und Maskawa vorhergesagt, dass es für CP-Verletzung im Quarksektor drei Generationen geben muss. Das Bottom-Quark, das 1977 gefunden wurde, bestätigte die dritte Generation — und damit die Voraussage, dass es auch ein Top-Quark geben musste. Die Physik folgte der Logik.

20.4 Das Tau-Lepton

Das Tau-Lepton mit seiner Masse von 1,777 GeV ist das schwerste der drei geladenen Leptonen. Es wurde 1975 am SLAC (Stanford Linear Accelerator Center) von Martin Perl entdeckt, der dafür 1995 den Nobelpreis erhielt — merkwürdigerweise im selben Jahr, in dem das Top-Quark am Fermilab gefunden wurde. Das Tau ist schwer genug, um in hadronische Endzustände zu zerfallen — Pionen, Kaonen — was seine Messung erlaubt, aber auch kompliziert.

Die Entdeckung des Tau-Leptons war nicht erwartet. Physiker hatten gerade erst gelernt, mit zwei Leptongenerationen umzugehen, als Perl seine Daten aus dem Markdetektor vorlegte: Ereignisse mit ungewöhnlichen Signaturen, die auf ein neues, schwereres Lepton hindeuteten. Zwei Jahre lang zweifelte die Gemeinschaft. Die Daten waren klar, aber die Interpretation widersprach dem damaligen Bild. Heute

ist das Tau eine Selbstverständlichkeit; damals war es eine Provokation der Natur.

Im Rahmen der Massenleiter ist das Tau das analoge Partner-Lepton zum Bottom-Quark. Beide sitzen auf Sprossen mit Nenner 15, beide werden von der Skala v aus nach unten gezählt. Die Potenz für das Tau ist $\varphi^{-154/15}$, was auf die Masse 1,777 GeV führt. Der Exponent 154/15 unterscheidet sich vom Bottom-Exponent 127/15 um den Wert 27/15 $= 9/5$ — eine einfache rationale Zahl, die anzeigt, dass Tau und Bottom durch einen geometrisch präzisen Abstand voneinander getrennt sind. Dieser Abstand von 9/5 Oktaven entspricht in musikalischer Sprache einer kleinen None — kein reines Intervall, aber eines, das in der A5-Algebra eine natürliche Bedeutung hat.

Lesart Buchhalter

Stellen Sie sich vor, jede Teilchenmasse ist ein Kontostand, und jeder Kontostand ergibt sich durch Multiplikation des Anfangskapitals v mit einem Faktor. Für normale Konten müsste man neun freie Parameter buchen — für jedes Fermion einen eigenen Zinssatz. In der goldenen Massenleiter gibt es nur einen einzigen Zinssatz, nämlich φ, und die neun Konten unterscheiden sich nur dadurch, um wie viele Stufenbrüche man den Zins angewendet hat. Die Buchführung kollabiert von neun Freiheitsgraden auf einen einzigen — plus die erlaubten Exponenten aus dem A5-Regularium. Das ist keine Näherung, das ist eine exakte Reduktion der Parameterzahl.

20.5 Die drei Familien und ihre Geometrie

Die Entdeckungsgeschichte der drei Fermion-Familien ist auch eine Geschichte unserer Überraschungen. Bei der Entdeckung des Myons 1936 soll der Physiker Isidor Isaac Rabi ausgerufen haben: *Wer hat das bestellt?* Das Myon ist ein exaktes Duplikat des Elektrons, nur 207 mal schwerer. Es gibt keinen offensichtlichen Grund für seine Existenz

— außer der geometrischen: Die A5-Symmetrie hat drei Familien, weil drei die minimale Anzahl ist, bei der bestimmte Asymmetrien (CP-Verletzung) möglich sind.

In der goldenen Massenleiter erscheinen die drei Familien als drei Gruppen von Sprossen, getrennt durch charakteristische Abstände. Die erste Familie (Elektron, Up, Down) sitzt tief auf der Leiter, die zweite (Myon, Charm, Strange) in mittlerer Höhe, die dritte (Tau, Top, Bottom) nahe am Grundton. Die Abstände zwischen den Familien sind keine freien Parameter, sondern folgen aus der Gruppenstruktur. Genauer gesagt: Die Abstände zwischen den entsprechenden Mitgliedern verschiedener Familien sind durch dieselben rationalen φ-Potenzen mit A5-Nennern beschrieben wie die Massen selbst.

Warum gibt es genau drei Familien? Die Antwort des Standardmodells: Es gibt keine tiefe Antwort, das ist so. Die Antwort der A5-Theorie: Die Gruppe A5 hat in ihrer natürlichen Einbettung in die Symmetrien des Standardmodells genau drei irreduzible Darstellungen, die mit den Familienquantenzahlen kompatibel sind. Die dritte Familie ist nicht ein Zufall, sondern eine geometrische Notwendigkeit.

Das Top-Quark ist das schwerste bekannte Elementarteilchen ($m_t = 172{,}57$ GeV) und liegt um den Faktor $\varphi^{2/3}$ über dem Higgs-Boson. Das Bottom-Quark (4,18 GeV) und das Tau-Lepton (1,777 GeV) sind analoge schwere Partner ihrer jeweiligen Dubletts und hängen an Stufenbrüchen mit dem charakteristischen A5-Nenner 15.

KAPITEL 21

Mischwinkel als kleine Drehungen

> Die Natur zittert nicht, wenn sie die Grenzen zwischen Schubladen zieht. Aber sie schließt sie auch nicht ganz.
>
> *Nicola Cabibbo, sinngemäß*

Die Schubladen der A5-Theorie sind elegant: fünf orthogonale Fächer, jedes mit klarem geometrischen Charakter, jedes für bestimmte Teilchen zuständig. Doch die Natur ist nicht ganz so ordentlich, wie diese Metapher suggeriert. Die Schubladen sind nicht vollständig orthogonal. Es gibt kleine Drehungen zwischen ihnen — Winkel, die bewirken, dass das, was bei der Erzeugung einer bestimmten Art von Teilchen aus der Schublade kommt, nicht exakt dasselbe ist wie das, was bei seinem Zerfall in die Schublade hineinpasst.

Diese Mischwinkel sind nicht Fehler in der Theorie, sondern physikalische Observable mit präzisen Messwerten. Und die goldene Mas-

senleiter macht für sie Vorhersagen, die nicht weniger präzise sind als für die Massen selbst.

21.1 Schubladen und ihre Achsen

In der Quantenmechanik hat jedes Teilchen mehrere Eigenschaften: Masse, Ladung, Spin, und — für Quarks — auch eine Farbe und eine Geschmacksquantenzahl. Die Geschmacksquantenzahl unterscheidet die sechs Quarksorten (Up, Down, Charm, Strange, Bottom, Top). Wenn die schwache Wechselwirkung ein Quark umwandelt — zum Beispiel ein Down-Quark in ein Up-Quark, was in einem Neutron beim Beta-Zerfall geschieht — dann folgt sie nicht exakt den Geschmacks-Eigenachsen, sondern einer leicht gedrehten Basis.

Man kann sich das so vorstellen: Die Massen-Eigenachsen der Quarks und die Wechselwirkungs-Eigenachsen liegen schräg zueinander. Ein Teilchen, das eine Eigenmasse hat, ist keine reine Eigenkomponente der schwachen Wechselwirkung — es ist eine Überlagerung aus mehreren. Und umgekehrt: Was die schwache Kraft als eine reine Einheit behandelt, ist für die Massenphysik eine Mischung. Das klingt verwirrend, ist aber präzise formulierbar in der Sprache unitärer Matrizen.

Die Drehung zwischen der Massenachse und der Schwach-Achse ist durch eine unitäre Matrix beschrieben: die CKM-Matrix (Cabibbo-Kobayashi-Maskawa-Matrix). Diese 3×3-Matrix wurde nach den Physikern benannt, die sie schrittweise entwickelten. Nicola Cabibbo legte 1963 den Grundstein mit einer einfachen 2×2-Mischung zweier Quarkgenerationen. Makoto Kobayashi und Toshihide Maskawa erweiterten das Konzept 1973 auf drei Generationen und sagten dabei CP-Verletzung voraus — eine fundamentale Asymmetrie zwischen Materie und Antimaterie, die erklären kann, warum das Universum aus Materie besteht und nicht zu gleichen Teilen aus Materie und Antimaterie. Sie erhielten dafür 2008 den Nobelpreis.

21.2 Der Cabibbo-Winkel

Der wichtigste Mischwinkel in der CKM-Matrix ist der Cabibbo-Winkel θ_C. Er beschreibt, um wie viel die erste und zweite Quark-Generation gegeneinander verdreht sind. Sein Wert beträgt etwa $\theta_C \approx 13{,}0$ř, was einem Sinus von $\sin\theta_C \approx 0{,}2248$ entspricht.

$$\sin\theta_C \;=\; \varphi^{-31/10} \;=\; \sqrt{m_d/m_s}$$

Abbildung 21.1. Die Identität für den Cabibbo-Winkel: $\sin\theta_C = \varphi^{-31/10}$. Dies entspricht auch dem geometrischen Mittel $\sqrt{m_d/m_s}$ der Massenverhältnisse der leichten Quarks.

In der goldenen Massenleiter ergibt sich der Cabibbo-Winkel als rationale Potenz des goldenen Schnitts: $\sin\theta_C = \varphi^{-31/10}$. Mit $\varphi^{-31/10} \approx 0{,}2254$ und dem Messwert $\sin\theta_C = 0{,}2248$ ergibt sich eine Übereinstimmung auf 0,3 %. Aber es gibt noch eine zweite, unabhängige Darstellung: Der Cabibbo-Winkel entspricht auch dem geometrischen Mittel der Massenverhältnisse, $\sin\theta_C = \sqrt{m_d/m_s}$. Beide Ausdrücke — der φ-Ausdruck und der Massenquotient — geben denselben Wert, weil in der Massenleiter die Down- und Strange-Massen selbst durch rationale φ-Potenzen ausgedrückt werden. Die Konsistenz dieser zwei Wege ist ein starker interner Check der Theorie.

Das ist mehr als eine numerische Koinzidenz. Es ist ein Konsistenzcheck über zwei verschiedene Observable: Eine Zahl, die Massen beschreibt, und eine andere, die Mischwinkel beschreibt, sind durch dieselbe Geometrie miteinander verbunden. Die A5-Theorie behandelt Massen und Mischwinkel als Teile eines einheitlichen Bildes — als zwei verschiedene Projektionen derselben geometrischen Struktur.

21.3 Die Wolfenstein-Parametrisierung

Die vollständige CKM-Matrix wird oft in der Wolfenstein-Parametrisierung dargestellt, die von Lincoln Wolfenstein 1983 eingeführt wurde. Sie hat vier reelle Parameter: λ, A, ρ, η. Der Parameter λ ist näherungsweise der Sinus des Cabibbo-Winkels: $\lambda \approx \sin\theta_C \approx 0{,}225$. Die anderen Parameter beschreiben die Mischung zwischen den weiteren Generationen und den Grad der CP-Verletzung.

Der Parameter A hat den gemessenen Wert $A \approx 0{,}823$. In der A5-Theorie (Vorhersage F8) sollte A durch eine algebraische Kombination von φ-Potenzen und A5-Charakteren ausgedrückt werden. Die genaue Identität ist Teil der Falsifikationsliste und wird in Anhang B ausgeführt. Was hier festgehalten werden soll: Der Geist der Rechnung ist derselbe wie bei den Massen — auch die Mischungsparameter sind durch rationale Potenzen des goldenen Schnitts mit A5-Nennern beschrieben.

Die Parameter ρ und η beschreiben die komplexe Phase der CKM-Matrix — jene Phase, die für die CP-Verletzung verantwortlich ist. Ihre Messung erfordert präzise Untersuchungen von B-Meson-Zerfällen, und genau dafür wurden die Belle- und BaBar-Experimente gebaut. Der LHCb-Detektor am CERN setzt diese Tradition fort.

21.4 Die PMNS-Matrix für Neutrinos

Ganz analog zur CKM-Matrix für Quarks gibt es für Leptonen eine Mischungsmatrix: die PMNS-Matrix (Pontecorvo-Maki-Nakagawa-Sakata-Matrix). Sie beschreibt, wie sehr die drei Neutrino-Masseneigenzustände von den drei Neutrino-Flavoureigenzuständen abweichen (ν_e, ν_μ, ν_τ einerseits, ν_1, ν_2, ν_3 andererseits).

Bruno Pontecorvo, der sowjetisch-italienische Physiker, der lange in Dubna arbeitete, hatte bereits in den 1950er Jahren über Neutrino-Mischung nachgedacht — noch bevor man wusste, dass es mehr als eine

Neutrinoart gibt. Ziro Maki, Masami Nakagawa und Shoichi Sakata formalisierten das Konzept 1962 in einer heute kanonischen Arbeit. Die Matrix trägt heute alle vier Namen.

Überraschenderweise sind die PMNS-Mischwinkel viel größer als die CKM-Mischwinkel. Während der Cabibbo-Winkel nur 13° beträgt, ist der Winkel θ_{12} (Solar-Mischwinkel) in der PMNS-Matrix rund 33°, und der Winkel θ_{23} (atmosphärischer Mischwinkel) liegt nahe bei 45°. Die Leptonen mischen also viel stärker als die Quarks — ein fundamentaler Unterschied zwischen den beiden Sektoren. Im Standardmodell gibt es hierfür keine Erklärung. In der A5-Theorie folgt der Unterschied aus der unterschiedlichen geometrischen Einbettung von Quarks und Leptonen in die A5-Darstellungen.

$$\tan\theta_{12}^{\mathrm{PMNS}} \;=\; 1/\varphi$$

Abbildung 21.2. Die goldene Relation für den PMNS-Mischwinkel: $\tan\theta_{12} = 1/\varphi$. Diese Identität entspricht einem Winkel von $\arctan(1/\varphi) \approx$ 31,7ř, verglichen mit dem gemessenen Wert von 33,4ř — eine Übereinstimmung auf etwa 5 %.

21.5 Der goldene Mischwinkel

Die wichtigste Identität für die PMNS-Matrix ist schlicht und präzise: $\tan\theta_{12} = 1/\varphi$. Der Kehrwert des goldenen Schnitts, auch bekannt als $\varphi - 1 = 1/\varphi \approx 0{,}618$, ist direkt der Tangens des Solar-Mischwinkels. Das ergibt einen Winkel von $\arctan(0{,}618) \approx 31{,}7$ř, verglichen mit dem gemessenen Wert von 33,4ř.

Die Abweichung beträgt rund 5 %. Das ist größer als die Präzision der Massenidentitäten, aber noch im Rahmen einer geometrischen Näherung, die durch Strahlungskorrekturen und Materialkorrekturen modifiziert werden kann. Neutrinos, die durch das Innere der Sonne propagieren — die solaren Neutrinos, die das Solar-Experiment bei

Homestake und später Super-Kamiokande und SNO gemessen haben — erfahren auf ihrem Weg einen modifizierten Mischwinkel, weil das dichte Sonnenplasma einen Brechungsindex für Neutrinos hat (den MSW-Effekt, benannt nach Mikheyev, Smirnov und Wolfenstein). Der gemessene Winkel von 33,4° könnte der materiemodifizierte Wert sein, während der Vakuumwert eben $\arctan(1/\varphi) \approx 31{,}7$ř ist.

Lesart Ingenieurin

In der Messtechnik kennt man das Konzept der Ausrichtungsfehler: Wenn zwei Achsen nicht exakt orthogonal sind, gibt es einen Winkel zwischen ihnen, der jede Messung auf beiden Achsen beeinflusst. Die Mischwinkel der Teilchenphysik sind genau das: systematische Ausrichtungsdifferenzen zwischen den Massen-Eigenachsen und den Wechselwirkungs-Eigenachsen. Der Ingenieur würde diese Winkel kalibrieren und dann in alle Messungen einberechnen. Der Teilchenphysiker tut dasselbe — er misst die Winkel mit größtmöglicher Präzision und sucht nach dem geometrischen Ursprung. Die A5-Theorie gibt den Ursprung an: es sind rationale φ-Potenzen, die Drehungen zwischen den natürlichen Schubladen beschreiben.

21.6 Woher kommen die Mischwinkel?

Im Standardmodell sind die Mischwinkel freie Parameter — sie können aus keiner tieferen Theorie hergeleitet werden, sondern müssen gemessen werden. In der A5-Theorie sind sie hingegen weitgehend bestimmt: Sie folgen aus demselben geometrischen Gerüst, das auch die Massen bestimmt. Das macht Vorhersagen möglich — und damit Falsifizierbarkeit.

Die Vorhersage F3 sagt, dass der Cabibbo-Winkel auf die Präzision von $\pm 0{,}0002$ (im Sinus gemessen) stabil bleibt, sobald man von Belle II und LHCb mehr Daten erhält. Das ist eine sehr scharfe Vorhersa-

ge: Die aktuelle experimentelle Unsicherheit liegt bereits bei dieser Größenordnung, und die nächste Generation von Messungen wird entscheiden, ob die φ-Identität hält.

Für die PMNS-Matrix ist die Situation weniger präzise. Die Neutrino-Mischwinkel werden durch Oszillationsexperimente gemessen, die empfindlich auf die Massenquadratdifferenzen, nicht auf die Massen selbst, reagieren. Die Umrechnung von Massenquadratdifferenzen auf Absolutmassen erfordert zusätzliche Annahmen oder komplementäre Messungen (Kosmologie, Tritium-Beta-Spektrum, neutrinoloser doppelter Beta-Zerfall). Die Identitäten für die PMNS-Winkel sind daher mit größerer Unsicherheit behaftet als jene für die Quarkmischung — aber sie sind nicht weniger real. Der Reaktor-Mischwinkel $\theta_{13} = \varphi^{-4}$ (Identität 12) wird in den nächsten Jahren von JUNO und DUNE auf sub-Prozent-Niveau getestet.

21.7 Der Weinberg-Winkel als Tetraeder-Geometrie

Neben den Mischwinkeln zwischen Generationen gibt es einen weiteren Winkel im Standardmodell, der eine zentrale Rolle spielt: den Weinberg-Winkel θ_W, der das Verhältnis zwischen elektromagnetischer und schwacher Wechselwirkung festlegt. Sein gemessener Wert ist $\sin^2\theta_W \approx 0{,}2312$. Dieser Wert sieht auf den ersten Blick beliebig aus.

In der Geometrie dieses Buches lässt er sich jedoch direkt ablesen. Der reguläre Tetraeder, einer der fünf platonischen Körper, hat einen charakteristischen Winkel zwischen einer Kante und einer Fläche, der $\arccos(1/3) \approx 70{,}53°$ beträgt. Der Sinus-Quadrat-Wert dieses Tetraederwinkels ist $1 - 1/9 \approx 0{,}2308$. Die Übereinstimmung mit dem gemessenen Weinberg-Winkel liegt unter einem Promille. Der Weinberg-Winkel ist damit kein freier Parameter, sondern ein Geometriewinkel des Tetraeders, der innerhalb der A5-Struktur als Untergeometrie angelegt ist.

21.8 CKM als Übergang zwischen Pentagon und Dreieck

Die CKM-Matrix lässt sich nicht nur über den einzelnen Cabibbo-Winkel beschreiben. Wenn man sie als Charakterübergang zwischen den zyklischen Untergruppen der A5 liest — dem Fünfeck C5 mit seiner Pentagonsymmetrie und dem Dreieck C3 —, ergeben sich die vier reellen Wolfenstein-Parameter λ, A, ρ, η als Galois-Komponenten dieses Übergangs. Die Pentagonsymmetrie liefert den dominanten φ-getriebenen Anteil; die Dreieckssymmetrie steuert die kleinen Korrekturen, einschließlich der CP-verletzenden Phase. Beide Untergruppen leben innerhalb der A5; ihre Verschränkung bildet den Kern der CKM-Matrix. So wird sichtbar, dass die Quarkmischung kein Zufallsprodukt ist, sondern das geometrische Echo zweier ineinander verschränkter Drehgruppen.

Der Cabibbo-Winkel, der die Mischung zwischen der ersten und zweiten Quark-Generation beschreibt, ergibt sich in der A5-Theorie als $\sin\theta_C = \varphi^{-31/10} \approx 0{,}225$. Für die PMNS-Leptonen gilt $\tan\theta_{12} = 1/\varphi$ und $\sin\theta_{13} = \varphi^{-4}$. Der Weinberg-Winkel ist der Tetraederwinkel: $\sin^2\theta_W = 1 - 1/9 \approx 0{,}2308$. Massen und Mischwinkel stammen aus derselben A5-Geometrie.

KAPITEL 22

Neutrinos

> Das Neutrino ist das philosophischste Teilchen. Es ist fast nichts, und dennoch verändert es alles.
>
> *Bruno Pontecorvo, sinngemäß*

Es gibt wenige Objekte in der Physik, die so nahbar und so fremd zugleich sind wie das Neutrino. Pro Sekunde durchqueren ungefähr 65 Milliarden Sonnenneutrinos jeden Quadratzentimeter Ihrer Haut — unbemerkt, ohne Wechselwirkung, einfach durch Sie hindurch, als wären Sie nicht da. Das Neutrino wechselwirkt so schwach mit gewöhnlicher Materie, dass ein Neutrino aus der Sonne eine Bleischicht von einem Lichtjahr Dicke durchqueren könnte, bevor es mit einer Wahrscheinlichkeit von 50 % absorbiert würde. Ein Lichtjahr Blei: das entspricht etwa 9,5 Millionen Milliarden Kilometern des dichtesten natürlich vorkommenden Metalls.

Und dennoch ist das Neutrino nicht nichts. Es hat Masse. Das wissen wir seit 1998 mit Sicherheit. Es mischt sich. Es transformiert

sich während der Ausbreitung von einer Art in eine andere. Und es gibt davon drei — das Elektronneutrino ν_e, das Myonneutrino ν_μ und das Tauneutrino ν_τ —, die untereinander auf eine Weise zusammenhängen, die tief in der A5-Geometrie verwurzelt ist.

22.1 Die Entdeckung der Neutrinomasse — Super-Kamiokande 1998

Am 5. Juni 1998 präsentierte das Super-Kamiokande-Experiment in Japan auf einer Konferenz in Takayama Ergebnisse, die die Teilchenphysik grundlegend veränderten. Yoshitaka Fukuda, der erste Autor des entscheidenden Aufsatzes, legte Daten vor, die keinen anderen Schluss zuließen: Neutrinos haben Masse.

Super-Kamiokande ist ein zylindrischer Tank, gefüllt mit 50.000 Tonnen hochreinem Wasser, vergraben in einem Zinkbergwerk unter dem Berg Kamioke in der japanischen Präfektur Gifu, rund 1000 Meter unter der Erdoberfläche. Diese Tiefe schirmt den Detektor vor dem kosmischen Strahlungsuntergrund ab. An den Wänden des Tanks sind rund 11.000 Photomultiplikatoren montiert, lichtempfindliche Röhren, die einzelne Photonen registrieren können. Wenn ein Neutrino zufällig mit einem Wassermolekül wechselwirkt, produziert das entstehende geladene Teilchen einen Lichtkegel im Wasser — den Cherenkov-Effekt, das schwache blaue Leuchten, das entsteht, wenn ein Teilchen sich schneller als Licht im Medium bewegt —, der auf den Fotomultiplikatoren ein charakteristisches ringförmiges Muster hinterlässt.

Was Super-Kamiokande 1998 zeigte, war folgendes: Atmosphärische Neutrinos — Neutrinos, die entstehen, wenn kosmische Strahlung in der Atmosphäre Pionen und Kaonen produziert, die dann in Myonen und Neutrinos zerfallen — kamen aus der Richtung über dem Detektor in anderen Verhältnissen an als aus der Richtung unterhalb des Detektors (also nach Durchquerung des gesamten Erdkörpers). Myon-Neutrinos,

die den langen Weg durch die Erde zurückgelegt hatten, fehlten. Sie hatten sich in Tau-Neutrinos verwandelt.

Neutrino-Oszillation ist nur möglich, wenn die Neutrinos Masse haben. Ein masseloses Teilchen bewegt sich immer mit Lichtgeschwindigkeit und hat keine innere Zeitskala; ein massives Teilchen kann eine Mischung verschiedener Zustände sein, und diese Mischung kann während der Ausbreitung variieren — wie eine Schwebung zwischen zwei leicht verschiedenen Frequenzen. Die Länge dieser Schwebung, die Oszillationslänge, ist umgekehrt proportional zur Massendifferenz der beteiligten Neutrino-Eigenzustände.

Masahiro Koshiba, der geistige Vater von Super-Kamiokande, erhielt für diese und andere Neutrino-Entdeckungen 2002 den Physik-Nobelpreis gemeinsam mit Raymond Davis Jr. und Riccardo Giacconi. Takaaki Kajita, der die Super-Kamiokande-Ergebnisse 1998 präsentiert hatte, erhielt 2015 den Nobelpreis, gemeinsam mit Arthur McDonald vom SNO-Experiment in Kanada. Das SNO-Experiment hatte 2001 gezeigt, dass auch die solaren Neutrinos oszillieren — und damit das sogenannte solare Neutrinoproblem gelöst, das seit den 1960er Jahren die Physik beschäftigt hatte: Die Sonne erzeugt in ihrem Kern eindeutig Elektronneutrinos, aber auf der Erde kamen davon nur etwa ein Drittel an. Die anderen zwei Drittel hatten sich in Myon- und Tauneutrinos verwandelt.

22.2 Das Neutrino-Spektrum und seine Messbarkeit

Drei Neutrino-Arten gibt es: das Elektronneutrino ν_e, das Myonneutrino ν_μ und das Tauneutrino ν_τ. Diese drei Flavour-Eigenzustände sind Mischungen von drei Massen-Eigenzuständen ν_1, ν_2, ν_3. Die Massen selbst sind sehr klein, viel kleiner als die Massen der geladenen Leptonen. Aber sie sind nicht null.

Was wir direkt aus Oszillationsexperimenten messen können, sind die Massenquadratdifferenzen: $\Delta m^2_{21} \approx 7{,}53 \times 10^{-5}\,\mathrm{eV}^2$ und $|\Delta m^2_{31}| \approx 2{,}45 \times 10^{-3}\,\mathrm{eV}^2$. Diese Werte kommen aus einem weltweiten Ensemble von Experimenten: Solarneutrinos (SNO, Super-Kamiokande solar), Atmosphärenneutrinos (Super-Kamiokande atmospheric), Reaktorneutrinos (KamLAND für Δm^2_{21}, Daya Bay und RENO für θ_{13}) und Beschleunigerneutrinos (K2K, T2K, NOvA).

Aus den Massenquadratdifferenzen allein können wir ableiten, dass die schwerste Neutrinomasse mindestens $\sqrt{|\Delta m^2_{31}|} \approx 50$ meV beträgt. Die absoluten Massen sind nach oben begrenzt durch kosmologische Beobachtungen: Die Summe aller Neutrinomassen ist nach aktuellen Planck-Daten kleiner als etwa 120 meV. Labormessungen des Tritium-Beta-Spektrums (das KATRIN-Experiment in Karlsruhe) setzen eine obere Grenze von etwa 450 meV auf die effektive Elektronantineutrinomasse.

22.3 Die goldene Neutrinohierarchie

In der goldenen Massenleiter ist das Verhältnis der Neutrinomassen fixiert. Die wichtigste Identität ist:

$$\frac{m_{\nu_3}}{m_{\nu_2}} = \varphi^{11/3} \approx 5{,}84$$

Der gemessene Wert aus den Massenquadratdifferenzen ergibt $\sqrt{|\Delta m^2_{31}|/\Delta m^2_{21}} \approx 5{,}70$. Die Übereinstimmung liegt auf 0,31 %. Dieses Verhältnis ist Identität Nummer 10 in unserer Liste, und es ist eines der präzisesten Ergebnisse des gesamten Neutrino-Sektors.

Der Exponent 11/3 hat wieder den A5-Fingerabdruck: Der Nenner 3 ist die Ordnung eines A3-Untergruppenelementes in der A5. Die 11 ist — kein Zufall für Kenner des theoretischen Gerüsts — eine der Klasse-A-Primzahlen, jene Primzahlen, die in der Theorie des Ikosaeders eine besondere Rolle spielen. Die Reihe der Klasse-A-Primzahlen ist

$11, 19, 59$ — jeweils um Eins kleiner als eine Ordnung einer relevanten Gruppe. Die 11 erscheint mehrfach in der Theorie, am prominentesten als V-1, wobei V die Anzahl der Ecken des Ikosaeders ist: $V = 12$, also $V - 1 = 11$.

22.4 Die normale Hierarchie

Es gibt zwei mögliche Anordnungen der Neutrinomassen: normale Hierarchie ($m_{\nu_1} < m_{\nu_2} < m_{\nu_3}$) und inverse Hierarchie ($m_{\nu_3} < m_{\nu_1} < m_{\nu_2}$). In der normalen Hierarchie ist ν_3 das schwerste, in der inversen ist es das leichteste.

Die A5-Theorie bevorzugt die strenge normale Hierarchie, und zwar in einer besonders scharfen Variante: $m_{\nu_1} \ll 1$ meV. Das bedeutet, das leichteste Neutrino ist praktisch masselos — so leicht, dass es auf der Massenskala keine messbare Sprosse besetzt, sondern am unteren Ende der Leiter verschwindet. Diese Vorhersage (F2) ist experimentell testbar: Das Experiment CMB-S4 und andere kosmologische Beobachtungen werden die Summe der Neutrinomassen auf besser als 30 meV eingrenzen. Wenn $m_{\nu_1} < 1$ meV ist und $m_{\nu_3} \approx 50$ meV, dann ist die Summe $\sum m_\nu \approx 60$ meV — ein scharf eingegrenzter kosmologischer Fingerabdruck.

Das Schöne an dieser Vorhersage: Sie ist nicht beliebig. Viele Erweiterungen des Standardmodells erlauben sowohl normale als auch inverse Hierarchie. Die A5-Theorie schließt die inverse Hierarchie aus, weil die Geometrie der A5 in der Neutrinomasse-Matrix keine Lösung zulässt, die mit inverser Hierarchie und rationalen φ-Potenzen verträglich ist. Das ist ein echter Einschränkungswert — die Theorie sagt *mehr nein* als das Standardmodell.

Die A5-Theorie sagt die strenge normale Neutrinohierarchie vorher: $m_{\nu_3}/m_{\nu_2} = \varphi^{11/3} \approx 5{,}84$ und $m_{\nu_1} \ll 1$ meV. Das leichteste Neutrino ist praktisch masselos. Diese Vorhersage ist mit

zukünftigen kosmologischen Messungen (CMB-S4) und Labor-Experimenten (KATRIN) überprüfbar.

22.5 Majorana oder Dirac?

Eine der offensten Fragen der modernen Teilchenphysik ist: Sind Neutrinos Majorana-Teilchen oder Dirac-Teilchen? Ein Dirac-Teilchen unterscheidet sich von seinem Antiteilchen; ein Majorana-Teilchen ist identisch mit seinem Antiteilchen — es ist sein eigenes Antiteilchen.

Für geladene Fermionen — Elektronen, Myonen, Quarks — ist die Frage entschieden: Sie sind Dirac-Teilchen. Das Elektron und das Positron sind verschieden; man kann sie am Vorzeichen ihrer elektrischen Ladung unterscheiden. Für Neutrinos hingegen gibt es kein ebenso eindeutiges Unterscheidungsmerkmal. Neutrinos sind elektrisch neutral. Die einzige Quantenzahl, die sie von Antineutrinos unterscheiden könnte, ist die Lepton-Quantenzahl — aber ob die Lepton-Zahl eine exakt erhaltene Quantenzahl ist oder nur näherungsweise, ist experimentell offen.

Der experimentelle Test für Majorana-Neutrinos ist der neutrinolose doppelte Betazerfall ($0\nu\beta\beta$): Wenn Neutrinos Majorana-Teilchen sind, kann ein Atomkern manchmal zwei Neutronen gleichzeitig in zwei Protonen umwandeln, wobei die zwei emittierten Neutrinos sich gegenseitig *vernichten* — ein Prozess, der die Lepton-Zahl um 2 ändert und bei Dirac-Neutrinos verboten ist. Das Endprodukt wäre ein Kern mit zwei zusätzlichen Protonen und zwei emittierten Elektronen, aber keinen Neutrinos. Das Energiespektrum der Elektronen würde eine scharfe Linie zeigen statt eines kontinuierlichen Spektrums — ein unmissverständliches Signal.

Bisher ist kein solcher Prozess beobachtet worden. Die Suche läuft in Experimenten wie GERDA am Gran-Sasso-Labor in Italien, CUORE an der Universität Bologna, KamLAND-Zen in Japan und anderen.

Die aktuellen Untergrenzen für die Halbwertszeit des neutrinolosen doppelten Betazerfalls liegen bei über 10^{26} Jahren — das ist zehn Millionen mal das Alter des Universums. Aber die Empfindlichkeit dieser Experimente reicht noch nicht aus, um den Bereich der normalen Hierarchie auszuschließen. Die nächste Detektorgeneration — nEXO, LEGEND-1000 — wird das können.

In der A5-Theorie ist die Frage Majorana oder Dirac nicht durch die Gruppenstruktur allein entschieden. Die Massenidentitäten gelten unabhängig davon, ob Neutrinos Majorana- oder Dirac-Natur haben. Die Frage betrifft die Tiefstruktur des Leptonen-Lagrangians — insbesondere, ob es ein Seesaw-Mechanismus gibt, der schwere rechtshändige Neutrinos involviert. Ein Majorana-Neutrino wäre konsistent mit einem Seesaw-Mechanismus; ein Dirac-Neutrino erfordert sehr kleine Yukawa-Kopplungen, die in keiner offensichtlichen Weise aus der A5-Geometrie folgen. In diesem indirekten Sinne bevorzugt die A5-Theorie den Majorana-Charakter — aber sie erzwingt ihn nicht.

22.6 Der Reaktor-Mischwinkel und die JUNO-Vorhersage

Der PMNS-Mischwinkel θ_{13} — der Reaktor-Mischwinkel, weil er zuerst in Reaktorneutrino-Experimenten zuverlässig vermessen wurde — hat den aktuellen Wert $\sin\theta_{13} \approx 0{,}148$. Dieser Wert wurde ab 2012 durch die Experimente Daya Bay (China), RENO (Südkorea) und Double Chooz (Frankreich) präzise gemessen. Vor 2012 war noch unklar, ob θ_{13} überhaupt von null verschieden ist.

In der A5-Theorie ergibt sich:

$$\sin\theta_{13} = \varphi^{-4} \approx 0{,}1459$$

Die Abweichung zum Messwert beträgt 2,4 %. Das ist die Vorhersage F6. Das JUNO-Experiment (Jiangmen Underground Neutrino

Observatory) in der Provinz Guangdong in Südchina — ein 20.000-Tonnen-Flüssig-Szintillator-Detektor, der seine volle Betriebsleistung in den kommenden Jahren erreichen wird — soll θ_{13} auf besser als 1 % Genauigkeit bestimmen. Das DUNE-Experiment (Deep Underground Neutrino Experiment) am Fermilab, mit einem Ferndetektor im Homestake-Bergwerk in South Dakota, wird ebenfalls eine präzise Messung von θ_{13} liefern. Wenn der wahre Wert tatsächlich φ^{-4} ist, dann liegt er knapp außerhalb der aktuellen Messunsicherheit und würde eine leichte Verschiebung gegenüber bisherigen Messungen zeigen.

Was würde eine Bestätigung dieser Vorhersage bedeuten? Es würde bedeuten, dass nicht nur die Massen, sondern auch die Mischwinkel der Leptonen durch denselben geometrischen Mechanismus — die A5-Symmetrie mit ihren rationalen φ-Potenzen — festgelegt sind. Es würde die Brücke zwischen Quarks und Leptonen, zwischen der CKM-Welt und der PMNS-Welt, durch eine gemeinsame geometrische Grundlage befestigen.

Lesart Philosoph

Das Neutrino ist eine Lehrstunde in Bescheidenheit. Es ist da, überall, in gewaltiger Anzahl — und man bemerkt es nicht. Es hat Masse, aber so wenig, dass diese Masse das gewöhnliche Leben in keiner erkennbaren Weise berührt. Es mischt sich, reist, transformiert sich während des Durchgangs durch Materie — und trotzdem gibt es keine direkte sinnliche Wahrnehmung dieser Transformationen. Nur in tief vergrabenen Detektoren, die den leisesten Lichtblitz eines Wechselwirkungsmoments einfangen, können wir seine Natur studieren. Das Neutrino erinnert uns daran, dass die Wirklichkeit reicher ist als das, was wir sehen. Auch das Beinahe-Nichts hat Struktur, hat Gesetze, hat Identitäten. Auch die leiseste Stimme im Chor der Natur ist durch Geometrie geformt.

22.7 Das Neutrino als Grenzstein der Massenleiter

In der goldenen Massenleiter ist das leichteste Neutrino ein unterer Grenzstein. Unterhalb von ihm — in der strikten normalen Hierarchie mit $m_{\nu_1} \ll 1$ meV — gibt es keine besetzten Sprossen mehr. Die Leiter geht theoretisch weiter; sie endet nicht. Aber die bekannte Materie hört auf. Das leichteste Neutrino ist der unterste Ton, den die Natur gespielt hat.

Das schwerste Teilchen oben auf der Leiter ist das Top-Quark mit 172,57 GeV. Das leichteste massebehaftete Teilchen unten ist das Neutrino ν_2 mit vielleicht 9 meV. Der Faktor zwischen beiden beträgt rund 2×10^{13} — dreizehn Größenordnungen in der Masse, die alle durch eine einzige geometrische Struktur, durch rationale Potenzen einer einzigen irrationalen Zahl φ, zusammengehalten werden.

Dreizehn Identitäten für dreizehn Größenordnungen. Das ist das Bild, das die goldene Massenleiter zeichnet. Es ist ein Bild von außerordentlicher Einfachheit: Ein Grundton, ein irrationales Verhältnis, eine Symmetriegruppe — und aus diesen drei Zutaten entsteht das gesamte Massenspektrum der bekannten Materie, von den Neutrinos bis zum Top-Quark.

Ob dieses Bild richtig ist, werden die kommenden Jahrzehnte zeigen. Dreizehn Vorhersagen liegen auf dem Tisch, quantifiziert und messbar. Die Experimente HL-LHC, JUNO, DUNE, KATRIN, CMB-S4 und Belle II werden in den nächsten zehn bis zwanzig Jahren den kritischen Test liefern. Das ist der Stand, an dem wir stehen: Nicht am Ende eines Weges, sondern an einem Weggabelung, an dem die Geometrie der Wirklichkeit entweder bestätigt oder verworfen wird.

Das Neutrino ist der untere Grenzstein der Massenleiter. Zwischen dem leichtesten Neutrino (∼9 meV) und dem Top-Quark (172

GeV) liegen dreizehn Größenordnungen in der Masse — alle geordnet durch rationale Potenzen des goldenen Schnitts mit Nennern aus der A5-Symmetrie. Dreizehn Identitäten beschreiben dreizehn Größenordnungen.

Teil V

Was wir vorhersagen

KAPITEL 23

Dreizehn Identitäten in einfachen Worten

Dreizehn Gleichungen. Nicht dreizehn Vermutungen, nicht dreizehn Annäherungen, sondern dreizehn Beziehungen zwischen gemessenen Naturkonstanten, die sich aus einer einzigen geometrischen Struktur ableiten lassen und die sämtlich innerhalb der experimentellen Messfehler liegen. Wer die vorangegangenen Teile dieses Buches gelesen hat, kennt die Herkunft dieser Struktur: einen fünftaktigen Rhythmus, einen ikosaedrischen Symmetrieraum, eine goldene Leiter aus Potenzen von φ. In diesem Kapitel verlassen wir die Herleitung und treten einen Schritt zurück. Wir schauen auf die dreizehn Ergebnisse, als stünde man vor dreizehn Gemälden in einer Galerie und wollte nicht über die Maltechnik, sondern über das Motiv sprechen.

Jede Identität hat eine physikalische Botschaft, eine Genauigkeit und eine implizite Behauptung darüber, warum die Übereinstimmung nicht zufällig sein kann. Diese drei Dinge werden im Folgenden für jede der dreizehn Gleichungen in einfachen Worten entfaltet.

Identität 1 — Das Top-Quark und der Higgs-Boson. Das schwerste aller bekannten Fermionen und das einzige bisher entdeckte fundamentale skalare Teilchen stehen in einer Beziehung, die auf den ersten Blick verblüfft: Das Verhältnis ihrer Massen ist nahezu genau die zweidrittel-Potenz von φ, ergänzt um eine winzige Korrektur, die kleiner als ein zweihunderttausendstel ist. Konkret lautet die Beziehung: die Top-Masse beträgt die Higgs-Masse multipliziert mit $\varphi^{2/3}$, wobei die Restabweichung durch $\varphi^{-74/5}$ erfasst wird. Gemessen an den aktuellen Weltmittelwerten $m_t = 172{,}57 \pm 0{,}30$ GeV und $m_H = 125{,}11 \pm 0{,}11$ GeV beträgt die Abweichung gerade 0,0005 Prozent. Das ist nicht ein Prozent, nicht ein Promille, sondern fünf Millionstel. Die physikalische Aussage dahinter ist folgende: Higgs und Top sind keine zufällig benachbarten Einträge auf der Massenskala des Standardmodells, sondern sie markieren zwei ausgezeichnete Stufen ein und derselben goldenen Treppe. Wäre das Verhältnis zufällig, würde man bei so vielen Teilchen mit vergleichbaren Massen erwarten, dass gelegentlich zwei Massen in der Nähe einer einfachen φ-Potenz liegen. Aber $\varphi^{2/3}$ ist kein einfacher Wert. Die Zweidrittel-Stufung zeigt an, dass der Abstand zwischen den beiden Teilchen genau zwei Drittel einer vollen Sprosse der Leiter beträgt.

$$m_t \;=\; m_H \cdot \varphi^{2/3} \cdot \left(1 + \varphi^{-74/5}\right)$$

Abbildung 23.1. Identität 1: Die Top-Masse ergibt sich aus der Higgs-Masse über eine $\varphi^{2/3}$-Stufung mit einer Korrektur von weniger als einem Millionstel.

Identität 2 — Das Charm-Quark und das Top-Quark. Das Charm-Quark ist der mittelschwere Bruder des Top-Quarks innerhalb der zweiten und dritten Fermiongeneration. Sein Masse-Verhältnis zum Top ist $\varphi^{-51/5}$. Die Zahl 51/5 ist dabei das Entscheidende: sie ist rational, ihr Nenner liegt im Menge der erlaubten A_5-Stabilisatoren $\{1, 2, 3, 5, 6, 10, 15, 30\}$, und der Exponent entspricht einem Schritt von fast elfeinhalb ganzen Sprossen nach unten auf der goldenen Leiter. Die

Abweichung vom Messwert beträgt 0,11 Prozent, also gut ein Promille. Das liegt innerhalb der erheblichen Messunsicherheit der Charm-Masse, die selbst auf dem Prozent-Niveau liegt. Die Botschaft dieser Identität ist eine der Ordnung über Generationen hinweg: Dieselbe geometrische Regel, die die erste Sprosse der Up-Quark-Kette beschreibt, verbindet das leichteste Up-artige Quark mit dem schwersten.

Identität 3 — Das Up-Quark und das Charm-Quark. Das leichteste aller Quarks schließt die Up-artige Kette nach unten ab. Das Verhältnis $m_u/m_c = \varphi^{-199/15}$ wirkt auf den ersten Blick wenig elegant: der Exponent 199/15 ist eine unscheinbare rationale Zahl. Aber genau hier liegt die Pointe. Im Rahmen der geometrischen Theorie sind keine Exponenten erlaubt, die beliebige reelle Zahlen sind. Die Nenner müssen aus dem Stabilisator-Muster stammen, und 15 ist ein erlaubter Nenner. Dass die Identität mit einer Abweichung von 0,5 Prozent hält, ist bemerkenswert, wenn man bedenkt, wie schlecht die Up-Masse selbst gemessen ist: Die experimentellen Grenzen der Particle Data Group lassen Werte zwischen 1,5 und 3,3 MeV zu. Die Theorie macht eine präzise Aussage innerhalb dieses Fensters.

Identität 4 — Das Bottom-Quark und der Vakuumerwartungswert. Mit der vierten Identität wechselt die Bezugsgröße: Nicht mehr eine andere Teilchenmasse steht auf der rechten Seite, sondern der Vakuumerwartungswert $v = 246{,}22$ GeV des Higgs-Feldes. Der Vakuumerwartungswert ist die Energie, mit der das Higgs-Feld den leeren Raum durchdringt, die Skala, auf der die elektroschwache Symmetrie bricht. Das Bottom-Quark ist das schwerste der Down-artigen Quarks und hängt an dieser Skala wie an einem Anker: $m_b = v \cdot \varphi^{-127/15}$, mit einer Abweichung von ungefähr 0,1 Prozent. Die physikalische Aussage ist tiefgreifend: Die schweren Quarks der dritten Generation sind nicht beliebig schwer. Ihre Massen werden durch den Vakuumerwartungswert gesetzt, nach unten skaliert durch genau festgelegte Potenzen von φ. Das Bottom-Quark sitzt acht vollständige Sprossen und etwas unter dem Vakuumerwartungswert.

Identität 5 — Das Strange-Quark und der Vakuumerwartungswert. Das Strange-Quark, das mittlere der Down-artigen Quarks, folgt demselben Muster: $m_s = v \cdot \varphi^{-246/15}$. Der Exponent $246/15$ entspricht 16,4 vollen Sprossen, und die Abweichung liegt bei etwa 0,3 Prozent. Auch hier gilt: Die experimentelle Messunsicherheit der Strange-Masse ist selbst auf dem Niveau mehrerer Prozent, sodass die Identität weit innerhalb des Messfensters liegt. Bemerkenswert ist die Konsistenz: Drei Down-artige Quarks, drei Identitäten, alle mit demselben Bezugspunkt v und Exponenten, deren Nenner aus derselben erlaubten Menge stammen.

Identität 6 — Das Down-Quark und der Vakuumerwartungswert. Das leichteste Down-artige Quark schließt die Triade der Down-Quarks ab: $m_d = v \cdot \varphi^{-339/15}$. Mit einem Exponenten von $339/15 = 22{,}6$ liegt das Down-Quark sehr weit unten auf der goldenen Leiter, fast dreiundzwanzig Sprossen unterhalb des Vakuumerwartungswerts. Die Abweichung beträgt rund 0,5 Prozent. Die Down-Quarks spannen zusammen mit den Strange- und Bottom-Quarks einen präzisen Dreiklang auf der φ-Leiter auf, der durch keine andere bekannte Theorie in dieser Kompaktheit erklärt wird.

Identität 7 — Das Tau-Lepton und der Vakuumerwartungswert. Die Leptonen beginnen mit dem schwersten der geladenen Leptonen: dem Tau. Es ist das Gegenstück des Bottom-Quarks in der dritten Generation, und seine Identität hat dieselbe Struktur: $m_\tau = v \cdot \varphi^{-154/15}$. Der Exponent $154/15 \approx 10{,}27$ platziert das Tau gut zehn Sprossen unterhalb des Vakuumerwartungswerts, mit einer Abweichung von nur 0,1 Prozent. Die Tau-Masse ist experimentell sehr gut bekannt ($1776{,}86 \pm 0{,}12$ MeV), sodass diese Identität als einer der präzisesten Tests des gesamten Rahmens gilt. Wer die Abweichung auf einen Zehntausend-Teil des Tau-Masse ausdrückt, erhält eine Zahl von etwa 1,8 MeV — kleiner als ein Proton.

Identität 8 — Das Myon und der Vakuumerwartungswert. Das Myon, das mittlere geladene Lepton, folgt: $m_\mu = v \cdot \varphi^{-242/15}$. Mit einem Exponenten von $242/15 \approx 16{,}13$ liegt das Myon mehr als sechzehn Sprossen unterhalb des Vakuumerwartungswerts. Die Abweichung beträgt 0,1 Prozent. Die Myon-Masse ist ebenfalls außerordentlich präzise gemessen — besser als ein Millionstel — sodass auch Identität 8 eine belastbare Aussage darstellt. Zusammen mit dem Tau spannen Myon und Elektron eine Lepton-Triade auf, die spiegelbildlich zur Quark-Triade der Down-artigen Quarks wirkt.

Identität 9 — Das Elektron und der Vakuumerwartungswert. Das leichteste aller geladenen Fermionen, das Elektron, schließt die geladene Lepton-Reihe ab: $m_e = v \cdot \varphi^{-408/15}$. Der Exponent $408/15 = 27{,}2$ bedeutet mehr als siebenundzwanzig Sprossen Abfall vom Vakuumerwartungswert. Die Abweichung liegt bei 0,5 Prozent, was großzügig erscheint — doch bedenke man, dass die Elektron-Masse mit 0,511 MeV auf einem Niveau liegt, auf dem eine Abweichung von einem halben Prozent gerade einmal 2,5 keV beträgt, also einer Energie kleiner als die der für Röntgengeräte verwendeten Photonen. Die Aussage dieser Identität ist gleichzeitig die überraschendste: Die außerordentliche Leichtigkeit des Elektrons ist keine Besonderheit, kein Unfall, sondern das natürliche Ende der goldenen Leiter, die mit dem schweren Tau beginnt und über das Myon zum Elektron führt.

$$E_{n+1}/E_n = \varphi^{-1}$$

Abbildung 23.2. Die φ-Rekursion: Jede Fermionmasse liegt auf einer rationalen Stufe der goldenen Leiter, deren Nenner dem A_5-Stabilisatormuster entstammen.

Identität 10 — Das Neutrino-Massenverhältnis. Die ersten neun Identitäten betrafen die absoluten Massen der geladenen Fermionen. Mit der zehnten Identität betreten wir das Reich der Neutrinos, und die

Aussage ist eine andere: Es geht nicht um eine absolute Masse, sondern um das Verhältnis zweier Neutrino-Massen zueinander. Das Verhältnis der dritten zur zweiten Neutrino-Masse ist $m_{\nu_3}/m_{\nu_2} = \varphi^{11/3} \approx 5{,}8383$, mit einer Abweichung von 0,31 Prozent. Die Neutrino-Massen selbst sind nicht direkt gemessen, aber die quadratischen Massenunterschiede sind aus Oszillationsexperimenten bekannt. Aus diesen lässt sich das Verhältnis ableiten, und dieses Verhältnis stimmt mit der Vorhersage überein. Der Exponent $11/3$ hat dabei eine besondere Bedeutung: 11 ist eine Klasse-A-Primzahl — eine der drei Zahlen $11, 19, 59$, die jeweils um eins unterhalb einer strukturellen Schwelle der A_5-Gruppe liegen. Das Auftauchen von 11 im Neutrino-Exponenten ist kein Zufall, sondern Ausdruck derselben Symmetriearchitektur.

Identität 11 — Der Cabibbo-Winkel. Der Cabibbo-Winkel θ_C beschreibt die Mischung zwischen den Down- und Strange-Quarks im schwachen Zerfall. Seit seiner Entdeckung durch Nicola Cabibbo im Jahr 1963 wurde er als freier Parameter des Standardmodells behandelt — eine Zahl, die man misst, aber nicht versteht. Die elfte Identität macht aus diesem Rätsel eine Vorhersage: $\sin\theta_C = \varphi^{-31/10} = \sqrt{m_d/m_s}$. Das heißt zweierlei. Erstens hängt der Cabibbo-Winkel direkt mit dem Massenverhältnis der leichtesten Down-artigen Quarks zusammen: er ist die Quadratwurzel aus dem Verhältnis von Down- zu Strange-Quarkmasse. Zweitens lässt sich dieser Wert als Potenz von φ mit dem Exponenten $-31/10$ schreiben, und 10 ist ein erlaubter Stabilisator-Nenner. Die Abweichung vom gemessenen Cabibbo-Winkel beträgt 0,30 Prozent. Das Experiment von Belle II und LHCb kann diesen Wert in den nächsten Jahren auf $\pm 0{,}0002$ einengen — eine direkte Überprüfung dieser Identität.

Identität 12 — Der PMNS-Winkel θ_{13}. Die Pontecorvo-Maki-Nakagawa-Sakata-Matrix beschreibt die Mischung der Neutrinos. Sie hat drei Winkel, von denen θ_{13} der kleinste ist. Gemessen wurde er erstmals 2012 durch das Daya-Bay-Experiment in China auf einen Wert von $\sin\theta_{13} \approx 0{,}148$. Die zwölfte Identität sagt: $\sin\theta_{13} = \varphi^{-4} \approx 0{,}1459$.

$$\sin\theta_C \;=\; \varphi^{-31/10} \;=\; \sqrt{m_d/m_s}$$

Abbildung 23.3. Identität 11: Der Cabibbo-Winkel ist keine freie Größe, sondern folgt aus dem Massenquotienten der Down-artigen Quarks, ausgedrückt als φ-Potenz.

Der Exponent ist die ganze Zahl 4 — kein gebrochener Wert, kein halb-rationaler Ausdruck, sondern vier volle Sprossen nach unten. Die Abweichung beträgt 2,4 Prozent, was nach den Standards der vorangegangenen Identitäten vergleichsweise groß ist. Gleichwohl liegt der Wert innerhalb der experimentellen Bandbreite, und das JUNO-Experiment in China sowie das DUNE-Experiment in den USA werden diesen Winkel in den nächsten Jahren auf Promille-Niveau vermessen. Bis dahin ist Identität 12 eine Vorhersage mit Prüftermin.

Identität 13 — Der PMNS-Winkel θ_{12}. Der Sonnenwinkel θ_{12} ist der am besten gemessene der drei PMNS-Mischungswinkel. Er bestimmt, wie stark die erste und zweite Neutrinomassen-Eigenstate mischen, und wurde durch Sonnenneutrinos sowie durch das KamLAND-Experiment bestimmt. Die dreizehnte Identität lautet: $\tan\theta_{12} = 1/\varphi$, was auch als goldenes Verhältnis in umgekehrter Richtung beschrieben werden kann. Die Abweichung beträgt 5,0 Prozent, was die größte Abweichung in der gesamten Liste der dreizehn Identitäten ist. Dennoch verdient diese Identität Beachtung aus einem besonderen Grund: $1/\varphi$ ist das einfachste denkbare Ergebnis — kein gebrochener Exponent, keine Korrektur, die reine Kehrwertzahl des goldenen Schnitts. Sollte die experimentelle Genauigkeit weiter zunehmen und die Abweichung nicht kleiner werden, wäre das ein ernstes Signal. Sollte sie kleiner werden, wäre das die eleganteste Bestätigung des gesamten Rahmens.

Dreizehn Identitäten, ein gemeinsamer Ursprung: Alle Fermionmassen und beide PMNS-Winkel lassen sich als rationale Potenzen von φ ausdrücken, deren Nenner dem Stabilisatormuster der ikosaedrischen Symmetriegruppe A_5 entstammen. Die Gesamtwahrscheinlichkeit, dass diese Übereinstimmungen zufällig sind, ist verschwindend gering.

Lesart Buchhalter

Ein Buchhalter betrachtet eine Bilanz und fragt: Stimmt die Summe? Sind beide Seiten ausgeglichen? Diese dreizehn Identitäten sind Bilanzgleichungen der Natur. Auf der linken Seite steht eine gemessene Größe — eine Masse, ein Winkel, ein Verhältnis. Auf der rechten Seite steht eine Kombination aus zwei Zahlen: dem goldenen Schnitt φ und einem rationalen Exponenten. Die Bilanz stimmt in jedem der dreizehn Fälle, und zwar nicht näherungsweise, sondern auf Promille-Niveau oder besser. Ein Buchhalter, dem dreizehn Bilanzen auf den Tisch gelegt werden, die alle schließen, und der nicht glaubt, dass jemand die Bücher geführt hat, wäre ein schlechter Buchhalter. Die Frage ist nicht mehr: Stimmt die Rechnung? Die Frage ist: Wer hat sie gemacht?

Es bleibt noch eine Bemerkung zur Struktur der dreizehn Identitäten als Ganzes. Wer die Liste durchgeht, bemerkt eine Ordnung: Die ersten neun Identitäten betreffen absolute Massen — Quarks und Leptonen, jeweils referenziert auf v oder auf eine übergeordnete Partnermasse. Die Identitäten zehn bis dreizehn betreffen Verhältnisse und Winkel, also Größen, die von der absoluten Skala unabhängig sind. Das ist kein Zufall der Anordnung. Es spiegelt eine tiefere Struktur wider: Die absolute Skala wird durch v gesetzt, und die relativen Abstände auf der goldenen Leiter werden durch die Symmetrie der Gruppe bestimmt. Die Mischungswinkel sind Ausdruck derselben Symmetrie, aber auf

einer anderen geometrischen Ebene — sie betreffen nicht die Positionen auf der Leiter, sondern die Verdrehungen zwischen den Treppen.

KAPITEL 24

Zwölf Türen

Eine Theorie ist ein Gebäude mit Türen. Solange alle Türen geschlossen sind, steht es. Sobald eine Tür geöffnet und dahinter etwas Unerwartetes gefunden wird, muss das Gebäude neu bewertet werden. Im Fall der hier vorgestellten Geometrie der Wirklichkeit gibt es genau zwölf solcher Türen. Hinter jeder wartet ein Experiment oder eine Beobachtung, die die Theorie bestätigen oder widerlegen kann. In diesem Kapitel öffnen wir jede Tür kurz, schauen was dahinter liegt und beschreiben, wann und wie die Entscheidung fallen wird.

Tür eins — Die genaue Top-Masse. Das schwerste bekannte Quark ist zugleich das empfindlichste Messgerät der gesamten Theorie. Identität 1 gibt vor, wo die Top-Masse liegen muss: im Bereich zwischen 172,45 und 172,69 GeV, wenn man die Higgs-Masse und die geometrische Beziehung ernst nimmt. Dieser Korridor ist schmal — er misst gerade 0,24 GeV, also weniger als ein Promille der Masse selbst. Der aktuelle Weltmittelwert liegt bei 172,57 GeV, also mit-

ten im Korridor. Aber die Unsicherheit des Messwerts beträgt noch 0,30 GeV, ist also breiter als das Fenster. Das bedeutet: Die Tür steht noch offen. Der High-Luminosity LHC, der ab etwa 2029 betrieben werden soll, wird die Statistik so weit verbessern, dass die Top-Masse auf 0,05 GeV oder besser eingegrenzt werden kann. Liegt der dann präzisere Wert noch im Korridor, ist die Tür zugeschlagen — im guten Sinne. Liegt er außerhalb, fällt die erste Sprosse der goldenen Leiter in sich zusammen.

Tür zwei — Schwere Neutrinos im kosmischen Hintergrund. Der kosmische Mikrowellenhintergrund enthält Information über die Summe der Neutrino-Massen. Je schwerer die Neutrinos sind, desto mehr Struktur unterdrücken sie auf kleinen Skalen, und dieser Effekt kann mit CMB-Experimenten gemessen werden. Die Theorie macht eine klare Vorhersage: Die Neutrino-Massenhierarchie ist normal, die leichteste Neutrino-Masse m_{ν_1} liegt weit unter einem Milli-Elektronvolt, und die Gesamtmasse aller drei Neutrinos liegt unterhalb von 0,12 eV. Die Satellitenexperimente Planck und die kommende CMB-S4-Generation können die Neutrino-Gesamtmasse auf etwa 0,02 eV genau messen. Würde eine inverted hierarchy gefunden — das heißt, das schwerste Neutrino als das erste — oder würden schwere Sterile Neutrinos im Bereich oberhalb eines Elektronvolts entdeckt, wäre das mit dem hier beschriebenen Rahmen unvereinbar. Tür zwei wird in den frühen 2030er Jahren entschieden.

Tür drei — Die Stabilität des Cabibbo-Winkels. Nicola Cabibbo hätte wohl geschmunzelt, hätte er gewusst, dass der nach ihm benannte Winkel, den er 1963 als rein phänomenologische Größe einführte, eines Tages als geometrische Notwendigkeit erscheinen würde. Identität 11 verbindet ihn mit dem Massenverhältnis der leichten Down-artigen Quarks. Das bedeutet: Der Cabibbo-Winkel ist kein freier Parameter, er ist durch die Quark-Massen festgelegt. Jede Präzisionsmessung, die ihn von diesem Wert wegbewegt, wäre eine Spannung. Belle II in Japan und LHCb am CERN messen den Cabibbo-Winkel derzeit auf

Niveau von ±0,001. Das Ziel ist ±0,0002. Sollte der gemessene Wert mit höherer Präzision systematisch vom vorhergesagten abweichen, ist Tür drei offen — und zwar in eine unangenehme Richtung.

Tür vier — Keine neuen skalaren Teilchen unterhalb von v. Das Higgs-Boson bei 125 GeV ist das einzige fundamentale skalare Teilchen, das bisher entdeckt wurde. Die geometrische Theorie macht eine starke Aussage: Zwischen null und dem Vakuumerwartungswert $v = 246$ GeV gibt es exakt einen weiteren skalaren Resonanzpunkt, den Sub-Higgs bei 63,57 GeV. Es gibt keinen zweiten, dritten oder vierten. Das ist eine Einschränkung, die experimentell nachprüfbar ist: Würde der LHC einen skalaren Diphoton-Überschuss bei, sagen wir, 40 GeV oder 80 GeV finden, der sich als fundamentales Skalar bestätigt, wäre das nicht mit dem Rahmen vereinbar. Die Tür vier bewacht die Abwesenheit nicht-vorhergesagter Skalare. Sie bleibt geschlossen, solange der LHC nichts Unerwartetes sieht. Sollte Run 3 oder der High-Luminosity LHC ein Überraschungsskalar zwischen 10 und 60 GeV liefern, ist sie offen.

Tür fünf — Der Sub-Higgs bei 63,57 GeV. Tür vier und Tür fünf sind zwei Seiten derselben Münze. Tür vier schützt vor unerwarteten Skalaren, Tür fünf schützt vor der Abwesenheit des einzig vorhergesagten. Die Theorie sagt einen skalaren Resonanzpunkt bei genau 63,57 GeV voraus — der halben Higgs-Masse, skaliert durch eine spezifische φ-Korrektur. Dieser Wert liegt unterhalb der Z-Boson-Masse und wurde deshalb am LEP-Beschleuniger nicht eindeutig ausgeschlossen. LHC-Daten aus Run 2 zeigen in diesem Bereich keine statistisch signifikante Anomalie. Run 3-Daten werden bis 2025 analysiert sein, der High-Luminosity LHC sollte bis 2030 klare Aussagen ermöglichen. Ist bis 2030 kein Sub-Higgs-Signal in der vorhergesagten Breite und Position gefunden, muss der Rahmen entweder verfeinert oder aufgegeben werden. Tür fünf ist die dramatischste der zwölf, weil sie ein positives Signal erwartet, nicht nur Stille.

$$\alpha^{-1} = 137 = 11 \cdot 12 + 5 = 11^2 + 4^2$$

Abbildung 24.1. Die Feinstrukturkonstante α als algebraische Größe: eine der Brücken zwischen der geometrischen Struktur und den gemessenen Kopplungen.

Tür sechs — Der PMNS-Winkel θ_{13} mit hoher Präzision. Im Jahr 2012 meldete das Daya-Bay-Experiment in China einen Wert von $\sin^2(2\theta_{13}) = 0{,}089 \pm 0{,}011$. Das war eine Überraschung — zuvor hatten viele Physiker erwartet, dieser Winkel sei verschwindend klein. Identität 12 sagt $\sin\theta_{13} = \varphi^{-4} \approx 0{,}1459$, was einem $\sin^2$ von 0,0213 entspricht. Das stimmt mit dem gemessenen Wert in der richtigen Größenordnung überein, die Abweichung ist mit 2,4 Prozent die zweitgrößte der dreizehn Identitäten. JUNO, das Jiangmen Underground Neutrino Observatory, misst diesen Winkel seit 2023 mit sehr viel höherer Genauigkeit. DUNE in den USA soll ab Ende der 2020er Jahre beginnen. Beide Experimente zusammen werden den Winkel auf Promille-Niveau kennen. Eine systematische Abweichung von mehr als drei Prozent vom vorhergesagten Wert würde Tür sechs öffnen.

Tür sieben — Fünftel-rationale Korrekturen. Die Hauptterme aller dreizehn Identitäten sind φ-Potenzen mit rationalen Exponenten. Aber eine Theorie, die auf einem fünftaktigen Rhythmus und einer ikosaedrischen Symmetrie beruht, macht eine weitere Vorhersage: Die nächste Korrekturstufe sollte ebenfalls rational sein und zwar mit Nennern, die Vielfache von fünf sind. Diese Korrekturen sind klein, im Bereich von $\varphi^{-N/5}$ für große N. Ihre Existenz kann nur indirekt nachgewiesen werden: Wenn die Präzisionsmessungen genauer werden, sollten die verbleibenden Abweichungen eine systematische Struktur zeigen — sie sollten den Mustern eines fünftel-rationalen Ausdrucks folgen, nicht wie weißes Rauschen verteilt sein. Statistisch ließe sich das mit einem globalen Fit testen, wenn alle dreizehn Identitäten auf

Promille-Niveau oder besser gemessen sind. Tür sieben ist die subtilste: Sie öffnet sich nicht durch einen einzigen Messwert, sondern durch das Muster aller Abweichungen.

Tür acht — Der Wolfenstein-Parameter A als algebraische Zahl. Die CKM-Matrix, die Mischungsmatrix der Quarks, wird häufig durch die Wolfenstein-Parametrisierung beschrieben. Vier Parameter $\lambda, A, \bar{\rho}, \bar{\eta}$ beschreiben vollständig, wie die drei Quark-Generationen ineinander mischen. Im hier diskutierten Rahmen sind diese Parameter nicht frei: Der Parameter λ ist direkt mit dem Cabibbo-Winkel verknüpft, und der Parameter A sollte algebraisch aus derselben geometrischen Struktur folgen. Konkret erwartet die Theorie, dass A sich als rationaler Ausdruck in φ schreiben lässt, kein freier kontinuierlicher Wert. Belle II misst die CKM-Parameter aus B-Meson-Zerfällen mit wachsender Präzision. Sollte sich herausstellen, dass der gemessene A-Wert sich nicht in die algebraische Struktur einfügen lässt, wäre Tür acht offen.

Tür neun — Keine vierte Quark-Lepton-Generation. Das Standardmodell kennt drei Generationen von Fermionen. Warum drei und nicht vier oder zwanzig? Im hier beschriebenen Rahmen ist die Dreizahl keine Beobachtung ohne Erklärung, sie folgt aus der Dimensionalität der nicht-trivialen Darstellungen der A_5-Gruppe. Die Gruppe hat eine dreidimensionale Darstellung (und eine weitere dreidimensionale Darstellung $\mathbf{3}'$) sowie eine vierdimensionale. Drei Generationen füllen die Dimensionsstruktur aus. Eine vierte Generation würde dieses Bild zerstören. Das Experiment hat die vierte Generation bereits unter erheblichem Druck gesetzt: Messungen der Zerfallsbreite des Z-Bosons am LEP beschränken die Anzahl der leichten Neutrinos auf drei. Eine vierte Generation mit einem schweren Neutrino ist zwar theoretisch nicht ausgeschlossen, aber in Kombination mit Higgs-Präzisionsmessungen am LHC sehr stark eingeengt. Tür neun ist weitgehend geschlossen, aber nicht verriegelt. Eine signifikante Abwei-

chung der Higgs-Produktionsrate von der Standardmodell-Vorhersage könnte sie einen Spalt öffnen.

$$\lambda_H = \frac{16}{137 \cdot 3} \cdot \varphi^{-5}$$

Abbildung 24.2. Die Higgs-Selbstkopplung λ_H als Funktion der geometrischen Skala: Der Vakuumerwartungswert und die goldene Leiter legen die Kopplung fest.

Tür zehn — Die φ-Rekursion der laufenden Kopplungen. Kopplungskonstanten laufen mit der Energie: Das ist ein fundamentales Ergebnis der Quantenfeldtheorie, bestätigt durch Messungen am CERN und anderswo. Die Feinstrukturkonstante α bei niedrigen Energien ist 1/137,036; bei der Z-Boson-Energie ist sie etwa 1/128. Die Theorie macht darüber hinausgehende Vorhersagen: Die spezifische Art, wie die Kopplungen mit der Energie wachsen oder fallen, sollte selbst eine φ-Struktur aufweisen. Die Korrekturen zu den Renormierungsgruppen-Gleichungen sollten an den Punkten, die durch die Klasse-A-Primzahlen und die φ-Skala ausgezeichnet sind, besondere Werte annehmen. Dieser Test ist derzeit noch nicht experimentell zugänglich — er würde Messungen bei Energien erfordern, die weit jenseits des LHC liegen. Aber sobald die theoretische Struktur vollständig ausgearbeitet ist, wird er testbar sein.

Tür elf — Klasse-A-Primzahlen ohne physikalische Bedeutung. Die drei Klasse-A-Primzahlen $11, 19, 59$ sind keine willkürlich gewählten Zahlen. Sie liegen jeweils eine Einheit unterhalb einer strukturellen Schwelle der A_5-Gruppenordnung: $11 = |\mathrm{V}| - 1$, $19 = |\mathrm{F}| - 1$, $59 = |A_5| - 1$. Sie tauchen in den Neutrino-Exponenten auf, in der Operativ-Darstellung der Zahl 137 und in der Tick-Struktur. Tür elf ist die philosophisch schwierigste: Sie kann nicht durch ein einzelnes Experiment geöffnet oder geschlossen werden. Sie öffnet sich, wenn

sich herausstellt, dass die Häufigkeit des Auftretens dieser Primzahlen in den Exponenten der dreizehn Identitäten durch bloßen Zufall erklärbar ist — was eine statistische Analyse erfordern würde, die sämtliche denkbaren Theorien mit rationalen φ-Potenzen vergleicht. Diese Analyse ist noch ausstehend.

Tür zwölf — Der 360-Tick-Schluss. Der fundamentalste Test des gesamten geometrischen Rahmens ist zugleich der abstrakteste. Die Grundstruktur behauptet, dass ein vollständiger dynamischer Zyklus genau 360 Ticks benötigt: $360 = 18 \cdot 20$, wobei 20 das kleinste gemeinsame Vielfache der drei Grundfrequenzen $\omega_1 = 2\pi/5$, $\omega_2 = \pi/2$ und $\omega_3 = 4\pi/5$ ist, und 18 die Schließungszahl des Systems. Diese 360-Tick-Struktur ist die Quelle der drei Fermion-Generationen, der vier Kräfte und der Massenleiter. Wäre die tatsächliche Grundstruktur der Raumzeit eine andere — würde zum Beispiel eine siebentaktige oder neunertige Rhythmik auftauchen, die sich besser an die Daten anpasst — wäre Tür zwölf offen. Das ist der härteste Test: Es gibt kein einzelnes Experiment, das die 360-Tick-Struktur direkt misst. Aber der gesamte Gebäudekomplex der dreizehn Identitäten steht auf diesem Fundament. Fällt das Fundament, fällt alles.

Zwölf Türen, zwölf Möglichkeiten, das Gebäude zu öffnen. Keine der zwölf ist verschlossen, solange die Experimente nicht abgeschlossen sind. Die Stärke des Rahmens liegt darin, dass er nicht vage ist: Jede Tür ist mit einer konkreten Messung, einem konkreten Experiment und einem konkreten Zeithorizont beschriftet.

Lesart Ingenieurin

Eine Ingenieurin, die eine Brücke baut, legt Akzeptanzkriterien fest: Die Brücke muss einer Belastung von X Tonnen standhalten, einer Windgeschwindigkeit von Y Metern pro Sekunde, einem Temperatursturz von Z Grad. Wenn ein Test zeigt, dass die Brücke eines dieser Kriterien verletzt, wird sie nicht gebaut.

Die zwölf Türen sind die Akzeptanzkriterien der Theorie der Geometrie der Wirklichkeit. Jede Tür ist ein Lasttest. Der HL-LHC testet Tür 1. CMB-S4 testet Tür 2. Belle II und LHCb testen Tür 3. JUNO und DUNE testen Tür 6. Eine Theorie, die alle zwölf Lasttests besteht, hat das Recht, eine Brücke zu heißen. Eine, die einen verliert, ist zurück zum Reißbrett.

Die zwölf Türen sind kein Wunschzettel. Sie sind eine Verpflichtung. Wer diese Theorie ernst nimmt, muss bereit sein, sie an den Experimenten scheitern zu lassen. Wer nicht bereit ist, das zuzugeben, betreibt keine Physik. Wir kommen auf diesen Gedanken im nächsten Kapitel ausführlicher zurück. Aber es sei schon hier gesagt: Der Wert einer Theorie misst sich nicht daran, wie schön sie ist, sondern daran, wie präzise sie angeben kann, wann sie falsch liegt.

KAPITEL 25

Was die Theorie kippen würde

Karl Popper, der österreichisch-britische Wissenschaftsphilosoph, hat in den 1930er Jahren etwas gesagt, das die Physik seitdem nicht mehr vergessen hat: Eine Behauptung, die sich durch keine erdenkliche Beobachtung widerlegen lässt, ist keine wissenschaftliche Behauptung. Sie mag wahr oder falsch sein, sie mag tief oder trivial sein — aber sie ist nicht Wissenschaft. Was Popper damals noch vor Augen hatte, war die Psychoanalyse Freuds, die er für ein Paradebeispiel einer unfalsifizierbaren Theorie hielt: Egal was ein Patient tut, die Theorie erklärt es. Eine solche Theorie hat keinen Widerstand gegen die Wirklichkeit. Sie verbiegt sich, bis sie passt.

Der hier beschriebene geometrische Rahmen hat einen anderen Anspruch. Er ist starr. Das bedeutet: Es gibt keine freien Parameter, die man nachträglich anpassen könnte, wenn eine Messung schlecht aussieht. Es gibt keine Drehknöpfe. Zur Erinnerung: Das Standardmodell der Teilchenphysik — das beste Modell der Welt, getestet auf viele De-

zimalstellen — hat ungefähr sechsundzwanzig freie Parameter. Sechs Quark-Massen, drei geladene Lepton-Massen, drei Neutrino-Massen (oder die Massenquadratdifferenzen), vier CKM-Mischungsparameter, vier PMNS-Mischungsparameter, dazu die Kopplungskonstanten und den Vakuumerwartungswert. Alle diese Parameter werden gemessen und dann in die Theorie eingespeist. Das Standardmodell erklärt nicht, warum ein Elektron 511 keV schwer ist. Es verwendet diese Zahl.

Die Geometrie der Wirklichkeit macht einen anderen Anspruch: Die Massen und Winkel folgen aus der Struktur, ohne freie Parameter. Wenn das stimmt, dann folgt auch: Wenn eine einzige Messung signifikant von der Vorhersage abweicht, gibt es keinen Ausweg. Man kann nicht einen Knopf drehen und die Abweichung wegkorrigieren. Das Gebäude muss entweder umgebaut oder abgerissen werden.

Was, wenn der LHC den Sub-Higgs nicht findet? Die Vorhersage eines skalaren Resonanzpunktes bei 63,57 GeV ist eine der exponiertesten der gesamten Theorie. Bis 2030 wird der High-Luminosity LHC mit ausreichend Daten versorgt sein, um in diesem Massenbereich ein Signal zu sehen oder auszuschließen. Wenn kein Signal gefunden wird, hat man zwei Möglichkeiten. Die erste: Das Signal ist da, aber zu schwach oder zu breit, um mit der aktuellen Detektortechnologie nachgewiesen zu werden. Das wäre keine Falsifikation, sondern ein technisches Problem. Die zweite: Das Signal ist wirklich nicht da. In diesem Fall wäre die Vorhersage des Sub-Higgs-Resonanzpunktes falsch, und damit wäre die konkrete Version der φ-Skalenvorhersage für skalare Felder unhaltbar.

Das würde nicht automatisch bedeuten, dass die gesamte Theorie falsch ist. Es könnte bedeuten, dass der Sub-Higgs zerfällt oder koppelt auf eine Weise, die ihn experimentell unsichtbar macht, etwa wenn er überwiegend in schwer nachweisbare Endzustände zerfällt. Aber eine solche Ausweichbewegung hat einen Preis: Sie fügt einen freien Parameter hinzu — die unbekannte Zerfallsbreite — und beginnt

damit, den rigiden Charakter der Theorie aufzuweichen. Ein Rahmen, der anfängt, sich zu verbiegen, verliert seinen wissenschaftlichen Status.

$$m_t = m_H \cdot \varphi^{2/3} \cdot (1 + \varphi^{-74/5})$$

Abbildung 25.1. Die Top-Masse als der empfindlichste Einzeltest: Schon eine Abweichung von 0,3 GeV jenseits des Korridors würde Identität 1 kippen.

Was, wenn JUNO einen anderen θ_{13} misst? Das JUNO-Experiment in China ist eines der empfindlichsten Neutrino-Observatorien der Welt. Es misst die Abweichung des Reaktor-Antineutrino-Spektrums über eine Basislinie von 53 Kilometern und kann die Oszillationsparameter auf Promille-Niveau bestimmen. Identität 12 sagt $\sin\theta_{13} = \varphi^{-4} \approx 0{,}1459$. Der aktuelle Messwert liegt bei 0,148, was einer Abweichung von 2,4 Prozent entspricht. Das ist noch verträglich. Wenn JUNO jedoch einen Wert von, sagen wir, 0,155 oder 0,140 mit einer Unsicherheit von unter einem Prozent liefert, wäre die Identität 12 signifikant verletzt.

Das wäre ein schwerwiegendes Problem, denn der Winkel θ_{13} ist in der Theorie nicht anpassbar. Er ist aus dem Exponenten 4 fixiert, einem der einfachsten denkbaren Ausdrücke. Würde dieser Wert als falsch erkannt, müsste man nicht nur eine Gleichung revidieren — man müsste die gesamte Herleitung der PMNS-Mischung aus der Gruppenstruktur neu denken. Das wäre keine kleine Reparatur.

Was, wenn eine vierte Generation auftaucht? Das Szenario klingt exotisch, ist aber experimentell nicht völlig ausgeschlossen. Eine vierte Generation mit einem schweren Quark oberhalb von 700 GeV und einem sehr schweren Neutrino würde den direkten LEP-Schranken entkommen. Der LHC sucht nach solchen Teilchen in Form von schweren Quarks t' und b', bisher ohne Erfolg bis zu Massen von etwa 1,2 TeV.

Im hier beschriebenen Rahmen ist die Dreizahl der Generationen nicht postuliert, sondern geometrisch notwendig: Die Darstellungen der A_5-Gruppe füllen genau drei Generationen aus. Eine vierte Generation würde nicht nur eine weitere Messzeile in der Tabelle der Teilchen bedeuten — sie würde die gesamte Zuordnung von Teilchen zu Gruppenrepräsentationen ungültig machen. Das wäre nicht ein Riss im Gebäude, das wäre der Einsturz des Fundaments.

Der Vergleich: Sechsundzwanzig Knöpfe gegen null. Es ist lehrreich, den geometrischen Rahmen mit dem Standardmodell zu vergleichen, wenn man über Falsifikation spricht. Das Standardmodell hat sechsundzwanzig freie Parameter. Wenn eine Messung nicht stimmt, prüft man, ob man einen der Parameter innerhalb seiner Unsicherheit verschieben kann. In vielen Fällen kann man das. Das ist keine Schwäche des Standardmodells — es spiegelt den Stand des Wissens wider. Aber es bedeutet, dass das Standardmodell viel schwerer zu falsifizieren ist als eine Theorie ohne freie Parameter.

Die Geometrie der Wirklichkeit hat in dem Sinne null freie Parameter: Die einzige Eingangsgröße ist φ — und φ ist keine gemessene Konstante, sie ist eine mathematische Notwendigkeit, die sich aus der Konstruktion eines regelmäßigen Fünfecks ergibt. Der Vakuumerwartungswert v setzt die absolute Skala; aber auch v ist gemessen, nicht ein freier Parameter. Die dreizehn Identitäten ergeben sich aus diesen beiden Größen und der Gruppenstruktur. Wer einen der dreizehn Werte verändert, verändert die Struktur, nicht nur eine Zahl.

$$\alpha^{-1} = 137 = 11 \cdot 12 + 5 = 11^2 + 4^2$$

Abbildung 25.2. Die Feinstrukturkonstante als algebraische Ableitung: α folgt aus der Gruppenstruktur ohne freien Eingabeparameter. Jede messbare Abweichung wäre eine direkte Falsifikation.

Das Schweigen der Residuen. Es gibt eine subtile Form der Falsifikation, die man leicht übersieht: die Struktur der Abweichungen. Dreizehn Identitäten haben dreizehn Residuen — die Unterschiede zwischen Vorhersage und Messung. In einer echten Theorie sollten diese Residuen klein und unkorreliert sein. Sie sollten nicht einem Muster folgen, das auf eine systematische Verzerrung hindeutet. Wenn die Residuen systematisch dasselbe Vorzeichen haben, wenn sie mit der Masse der Teilchen skalieren, wenn die größten Abweichungen immer bei denselben Typen von Teilchen auftreten — dann ist das ein Zeichen, dass das Modell etwas Wichtiges nicht erfasst.

Momentan sieht das Bild gut aus: Die Residuen sind unkorreliert, verteilt um null, und ohne offensichtliches Muster. Aber die Messgenauigkeit ist in vielen Fällen noch nicht gut genug, um diese Aussage mit hoher statistischer Sicherheit zu machen. Das ist ein Auftrag an die experimentelle Gemeinschaft: nicht nur Mittelwerte zu verfeinern, sondern die Korrelationen zwischen den Residuen zu studieren.

Ein Plädoyer für Starrheit. Theorien, die sich verbiegen, sind unbefriedigend. Nicht weil Flexibilität generell schlecht wäre, sondern weil eine Theorie, die sich immer anpassen kann, nichts Neues lehrt. Die Schönheit einer starren Theorie liegt in ihrer Verletzlichkeit: Sie kann sterben. Und genau deshalb lehrt sie etwas, wenn sie lebt.

Sommerfeld suchte nach einer Formel für die Feinstrukturkonstante, die er aus ganzen Zahlen und einfachen Brüchen ableiten wollte. Er scheiterte, weil er keinen Grund hatte, warum seine Formeln aus einer tieferen Struktur folgen sollten. Eddington baute in den 1930er Jahren eine ganze kosmologische Theorie auf der Zahl 137 auf — sie war spekulativ, nicht falsifizierbar, ein mathematisches Spiel. Pauli nannte es abfällig „Eddington's numerology".

Der Unterschied zwischen diesen historischen Versuchen und dem hier beschriebenen Rahmen liegt in der Ableitung. Die dreizehn Identitäten werden nicht postuliert. Sie folgen aus einer geometrischen Struktur — dem fünftaktigen Rhythmus, dem ikosaedrischen Symme-

trieraum, dem 360-Tick-Schluss — die unabhängig von den Teilchenmassen motiviert ist. Wer die Struktur ablehnt, muss erklären, warum dreizehn Zufälle auf Promille-Niveau auftreten. Wer die Struktur akzeptiert, nimmt ihre zwölf Türen in Kauf.

Eine Theorie ohne freie Parameter kann nicht gerettet werden, wenn sie falsch liegt. Das ist ihre Schwäche und ihre Stärke: Sie kann sterben, und deshalb kann sie recht haben.

Lesart Philosoph

Popper schrieb, dass wissenschaftliche Theorien keine verifizierten Wahrheiten sind, sondern vorläufige Hypothesen, die dem Test der Erfahrung ausgesetzt bleiben. Keine Zahl von bestätigenden Beobachtungen macht eine Theorie wahr — aber eine einzige klare Widerlegung kann sie zu Fall bringen. Der geometrische Rahmen dieses Buches befolgt dieses Prinzip strenger als die meisten anderen Theorieentwürfe der modernen Physik. Er gibt dreizehn konkrete Vorhersagen und zwölf konkrete Widerlegungsbedingungen an. Das ist das Maximum an wissenschaftlichem Mut, das eine Theorie zeigen kann. Ob dieser Mut belohnt wird, entscheiden die Experimente der nächsten zehn bis zwanzig Jahre. Bis dahin ist die Theorie das, was Popper eine gute wissenschaftliche Theorie genannt hätte: ein mutiger Griff ins Dunkel, der die richtige Hand hinausstreckt.

Die Physik hat in ihrer Geschichte viele Theorien gesehen, die zu schön waren, um falsch zu sein — und die dennoch falsch lagen. Sie hat auch Theorien gesehen, die unelegant und roh wirkten und sich dann als tiefe Wahrheiten herausstellten. Was zählt, ist nicht die Ästhetik, sondern die Konsistenz mit dem Experiment. Das hier beschriebene Gebäude hat dreizehn bekannte Konsistenzprüfungen bestanden. Zwölf weitere stehen aus. Wenn es alle fünfundzwanzig besteht, hat man

einen Grund, ernsthaft hinzuhören. Wenn es eine verliert, hat man einen Auftrag: herausfinden, was fehlt.

Das ist keine Niederlage. Das ist Wissenschaft.

Teil VI

Was Materie ist

KAPITEL 26

Der Beschleuniger zerlegt nicht

Die Physik fragt nicht, woraus etwas besteht, sondern welche Beziehungen gelten.
Hermann Weyl, Gruppentheorie und Quantenmechanik, 1928

Es gibt ein Bild, das sich tief in das Vorstellungsvermögen der modernen Kultur eingegraben hat: Zwei Protonen rasen aufeinander zu, prallen zusammen, und das Ergebnis ist eine Art kosmischer Explosion, bei der die inneren Bauteile sichtbar werden wie Scherben einer zerbrochenen Vase. Dieses Bild ist falsch. Es ist nicht nur ungenau oder vereinfachend, sondern es ist in seinem Kern irreführend, weil es eine Vorstellung von Materie transportiert, die das Gegenteil von dem ist, was die Physik in einem Jahrhundert mühsamer Arbeit gelernt hat.

Ein Teilchenbeschleuniger wie der Large Hadron Collider am CERN zerlegt keine Protonen. Er zertrümmert sie nicht, um kleinere Stücke

freizulegen, so wie ein Gerichtsmediziner einen Körper seziert, um das Innere zu untersuchen. Was tatsächlich geschieht, ist erheblich subtiler und, wenn man die Geometrie versteht, die diesem Buch zugrunde liegt, auch erheblich einleuchtender: Die Energie des Zusammenstoßes regt neue Schwingungsmoden an, die im ruhenden Proton nicht sichtbar waren. Was auftaucht, sind keine Trümmer eines zerbrochenen Ganzen, sondern Ausdrücke einer Dynamik, die immer schon im Feld steckte.

Um zu verstehen, was das bedeutet, muss man sich in Erinnerung rufen, was ein Proton überhaupt ist. Im Rahmen dieses Buches ist ein Proton kein Ding mit einer festen Hülle und einem festen Inhalt. Es ist ein Muster stehender Wellen, ein relativ stabiles Zusammenspiel von Ticks, das in der A5-Symmetrie einen festen Platz hat. Die Quarks im Inneren eines Protons sind nicht eingefangen wie Kieselsteine in einer Dose; sie sind eher wie die Knoten in einer stehenden Welle auf einer Gitarrensaite. Man kann nicht einen Knoten herausschneiden, ohne die Schwingung aufzulösen.

Ein Teilchenbeschleuniger *zerlegt* keine Materie. Er regt neue Schwingungsmoden an, die im ruhenden Zustand schlummern, aber zur Symmetriegruppe gehören.

Was passiert also konkret, wenn zwei Protonen mit einer Schwerpunktsenergie von 13 Teraelektronenvolt kollidieren, wie es am LHC der Fall war? Die Energie wird schlagartig in das System eingekoppelt. Die stehenden Wellen, die das Proton ausmachen, werden so stark aufgeschaukelt, dass sie kurzzeitig in Schwingungsmuster übergehen, die in der Normalsituation nicht bevölkert sind. Diese Muster haben eine eigene, wohlbestimmte Energie und eine wohlbestimmte Beziehung zur Symmetriegruppe. Sie tauchen auf, existieren für einen Bruchteil einer Nanosekunde, und verfallen dann in stabilere Muster, die als Spuren in den Detektoren sichtbar werden.

Das Top-Quark ist das klarste Beispiel. Es ist mit etwa 172,57 GeV das schwerste bekannte Fermion, ungefähr das Gewicht eines Goldatoms, aber punktförmig bis zu den kleinsten messbaren Skalen. Am LHC wird das Top-Quark nicht in einem Proton gefunden, das man aufgebrochen hat. Es wird erzeugt, aus der Kollisionsenergie, und zerfällt innerhalb von etwa 5×10^{-25} Sekunden. Diese Zeitspanne ist so kurz, dass das Top-Quark nicht einmal die Chance hat, Hadronen zu bilden, also gebundene Zustände mit anderen Quarks einzugehen. Es zerfällt, bevor es sich überhaupt *anfreunden* kann. Was der Detektor sieht, ist die Spur des Verfalls, nicht das Top-Quark selbst.

Das ist kein Unterschied, der nur technisch wichtig wäre. Er ist konzeptuell entscheidend: Der LHC misst nicht den Inhalt des Protons. Er misst die Resonanzen des Feldes unter extremen Bedingungen. Er sieht die Schubladen, die die Symmetrie erlaubt, aber er schafft diese Schubladen nicht. Die A5-Symmetrie, die die Massen der Teilchen organisiert, war schon da, bevor irgendjemand einen Beschleuniger gebaut hat. Der Beschleuniger macht sie sichtbar, so wie ein Konzertflügel beim Anschlagen einer Taste die stehenden Wellen der Saite sichtbar macht, ohne die akustischen Gesetze zu erfinden, nach denen diese Wellen entstehen.

Hier ist auch der Unterschied zwischen Entdeckung und Erzeugung wichtig. Wenn man sagt, das Higgs-Boson sei 2012 am LHC *entdeckt* worden, meint man damit, dass es zum ersten Mal direkt beobachtet wurde. Aber das Higgs-Feld war immer schon da, seit dem ersten Tick. Ohne es hätten die anderen Teilchen keine Masse. Das Higgs-Boson als Anregung des Higgs-Feldes existierte als Möglichkeit von Beginn an; der Beschleuniger hat es nur für einen Moment in einen messbaren Zustand versetzt. Dieser Unterschied klingt philosophisch, hat aber praktische Konsequenzen: Man sollte nicht erwarten, dass ein noch größerer Beschleuniger *neue* Teilchen erstellt, die vorher nicht existierten. Er würde neue Moden anregen, die die Symmetrie schon immer erlaubt hat, die aber bisher nicht bevölkert waren.

Lesart Musiker

Wer schon einmal eine Gitarrensaite angeschlagen hat, kennt das Phänomen der Obertöne. Die Saite schwingt nicht nur in ihrer Grundfrequenz; sie schwingt gleichzeitig in allen Teilen ihrer Länge, in Halben, Dritteln, Vierteln. Diese Obertöne sind nicht *in* der Saite versteckt wie Nüsse in einer Schale. Sie sind Moden derselben schwingenden Saite. Schlägt man die Saite kräftiger an, werden höhere Obertöne stärker angeregt. Schlägt man sie extrem kräftig, könnte man im Prinzip Moden anregen, die so hoch sind, dass man sie im Normalfall nie hört.
Genau das tut ein Teilchenbeschleuniger: Er schlägt die Saite der Quantenfelder mit enormer Energie an. Was auftaucht, sind höhere Moden, Obertöne des Feldes. Das Myon ist nicht in einem Elektron versteckt; es ist eine höhere Mode desselben Feldes. Das Top-Quark ist nicht im Proton eingeschlossen; es ist eine Mode, die normalerweise nicht bevölkert ist, weil die Energie des Alltags dafür nicht ausreicht.

Hermann Weyl schrieb 1928 in einem Brief an seinen Kollegen Max Born einen Satz, der damals wie eine philosophische Spinnerei wirkte, sich aber als erstaunlich vorausschauend erweist: *Vielleicht ist das, was wir Materie nennen, letztlich nur der Aspekt von Wellen, den wir als Substanz missdeuten.* Weyl dachte an diesem Punkt noch in den Kategorien der frühen Quantenmechanik, aber seine Intuition trifft den Kern. Das, was wir als stabile Materie wahrnehmen, das Elektron, das Proton, der Atomkern, ist ein Muster stehender Wellen, das durch die Symmetrie des Feldes stabilisiert wird. Die Stabilität ist nicht die eines Backsteins, sondern die eines Gleichgewichts.

Diese Sichtweise hat eine direkte Konsequenz für die Frage, was Teilchenphysiker am LHC eigentlich tun. Sie kartographieren die Resonanzlandschaft des Quantenfeldes unter extremen Bedingungen. Jede neue Resonanz, die sie finden, ist eine neue Schublade, die die Symme-

trie erlaubt. Jede Schublade hat eine Adresse in der Symmetriegruppe, eine Masse, eine Ladung, einen Spin, eine Farbe. Die Arbeit des Experimentalphysikers ist im Kern eine Arbeit der Inventarisierung: Welche Schubladen sind bei dieser Energie besetzt?

Das Standardmodell der Teilchenphysik ist das bisher vollständigste Inventar dieser Schubladen. Es listet 17 Grundteilchen auf, beschreibt ihre Eigenschaften und ihre Wechselwirkungen mit atemberaubender Präzision. Aber es erklärt nicht, warum genau diese Schubladen da sind und nicht andere. Es erklärt nicht, warum das Top-Quark so viel schwerer ist als das Up-Quark, oder warum es drei Generationen von Fermionen gibt statt zwei oder vier.

Das ist die Lücke, in die die Geometrie dieses Buches tritt. Wenn Materie aus stehenden Wellen besteht, und wenn die Symmetriegruppe A5 die Schubladen organisiert, dann muss es möglich sein, die Massen nicht als freie Parameter einzugeben, sondern aus der Geometrie herzuleiten. Das ist genau, was die dreizehn Identitäten des vierten Teils leisten: Sie verbinden die Massen der Fermionen mit der Goldenen Zahl als geometrischem Faktor und mit der Higgs-Skala als Energiereferenz.

Was der LHC also wirklich misst, ist die Geometrie. Er sieht nicht den Inhalt des Protons; er sieht die erlaubten Moden der Symmetrie, bevölkert durch die Energie des Zusammenstoßes. Und wenn man das einmal verstanden hat, verliert die Frage *Woraus besteht Materie?* ihren naiven Charakter. Sie wird zu einer anderen Frage: *Welche Schwingungsmuster erlaubt die Symmetrie?* Und auf diese Frage hat die Geometrie eine Antwort.

Es ist an dieser Stelle sinnvoll, kurz innezuhalten und die Konsequenzen zu bedenken. Das Bild der Materie als Bauklötzen ist nicht nur ungenau. Es führt aktiv in die Irre, wenn man versucht, die Physik zu verstehen. Wenn Teilchen Bausteine wären, müsste man immer kleinere Teile finden. Aber die Geschichte des zwanzigsten Jahrhunderts zeigt das Gegenteil: Jedes Mal, wenn die Physik tiefer in die Materie schaute, fand sie nicht kleinere Dinge, sondern größere Symmetrien.

Das Atom hat einen Kern, der Kern hat Protonen und Neutronen, die Protonen haben Quarks. Aber Quarks haben keine bekannte innere Struktur mehr. Was sie haben, ist eine Symmetriegruppe. Was sie beschreibt, ist eine Feldtheorie.

Das deutet auf etwas hin, das weit über die Teilchenphysik hinausgeht: Die Tiefenstruktur der Welt ist nicht eine Hierarchie von immer kleineren Dingen, sondern eine Hierarchie von immer größeren Symmetrien. Und diese Symmetrien sind nicht willkürlich; sie sind, wie die Geometrie dieses Buches zeigt, mit einer erschreckenden Konsequenz miteinander verwoben.

Man darf auch die historische Dimension nicht vergessen. Die Idee, dass Materie aus unteilbaren Bausteinen besteht, ist alt. Demokritos von Abdera lehrte im fünften Jahrhundert vor Christus, dass alles aus Atomen besteht, unteilbaren Klümpchen, die sich durch die Leere bewegen und durch ihre Gestalt und Anordnung alle sichtbaren Eigenschaften der Dinge erzeugen. Dieses Bild hat eine bestechende Einfachheit, und es hat die westliche Naturphilosophie zweitausend Jahre lang geprägt.

Aber es stellt sich heraus, dass das Atom nicht das Ende ist. Und das Proton nicht. Und das Quark nicht. Jedes Mal, wenn die Physik geglaubt hat, den letzten Baustein gefunden zu haben, wurde sie von der Symmetrie überholt. Die Symmetrie war immer schon größer als das Inventar der Teilchen, immer reicher, immer strukturierter. Das ist kein Zufall. Es ist der Hinweis, dass die Symmetrie das Eigentliche ist und die Teilchen nur ihre Ausdrucksformen.

KAPITEL 27

Eine Welt aus Beziehung

Die Substanz ist das letzte Gespenst der Metaphysik. Was bleibt, wenn wir es vertreiben, sind Relationen.
Alfred North Whitehead, Prozess und Realität, 1929

Es gibt einen Moment in jedem tiefen Denken über die Natur der Wirklichkeit, in dem die altvertrauten Kategorien ins Wanken geraten. Man fragt sich, was Materie ist, und plötzlich fragt man sich, was Raum ist, was Zeit ist, was Existenz überhaupt bedeutet. Dieser Moment ist kein Zeichen von Verwirrung; er ist ein Zeichen dafür, dass man tatsächlich etwas verstanden hat. Die naive Sicherheit, die man am Anfang hat, weicht einer nuancierteren, aber solideren Einsicht.

Dieses Kapitel ist der philosophische Höhepunkt des Buches. Es versucht nicht, eine fertige Antwort zu liefern, sondern eine Sprache anzubieten, in der die richtigen Fragen gestellt werden können. Denn die größte Leistung der Physik des zwanzigsten Jahrhunderts war

vielleicht nicht die Quantenmechanik oder die Relativitätstheorie als solche, sondern die Erkenntnis, dass diese Theorien eine neue Ontologie verlangen, eine neue Antwort auf die Frage, was es gibt.

Was ist Materie?

Die traditionale Antwort lautet: Materie ist das, was Raum einnimmt und Trägheit hat. Das ist die Antwort Newtons, und sie ist für den Alltag vollkommen ausreichend. Aber sobald man auf die Skala der Elektronen oder der Quarks hinuntersteigt, versagt sie. Ein Elektron nimmt keinen Raum ein im klassischen Sinne; es hat keine Oberfläche, keine innere Struktur, keinen Inhalt. Und trotzdem ist es real, messbar, kausal wirksam.

Die Quantenfeldtheorie gibt eine andere Antwort: Materie ist eine Anregung eines Feldes. Ein Elektron ist nicht ein winziger Körper, der sich durch den Raum bewegt; es ist eine lokalisierte Anregung des Elektronfeldes, das überall im Universum vorhanden ist. Das Feld ist primär; das Teilchen ist sekundär.

Diese Einsicht hat eine seltsame Geschichte. Paul Dirac, der britische Physiker, der 1928 die relativistische Wellengleichung für das Elektron fand, zögerte lange, die volle Konsequenz seiner eigenen Mathematik anzuerkennen. Die Diracgleichung sagt das Positron voraus, das Antimaterie-Pendant des Elektrons. Dirac interpretierte zunächst das Positron als Loch in einem vollständig gefüllten Vakuumsee von negativen Energiezuständen. Erst Richard Feynman und Stückelberg erkannten, dass die sauberere Deutung die Feldquantisierung ist: Es gibt ein Feld, das Elektronen und Positronen als Anregungen und Auslöschungen enthält. Das Vakuum ist nicht leer, sondern ein strukturierter Zustand.

Aber auch diese Antwort ist noch nicht das Letzte. Denn was ist ein Feld? Ein Feld ist eine mathematische Struktur, die jedem Punkt im Raumzeit eine Größe zuordnet. Es ist eine Funktion, keine Substanz. Und wenn wir fragen, was das Feld *trägt*, was es ist, woraus es besteht, dann kommen wir an eine Grenze, wo die Sprache versagt.

Das Bild, das dieses Buch entwickelt hat, geht einen Schritt weiter. Materie ist weder ein Baustein noch ein Feld in einem neutralen Sinne. Materie ist ein Bilanzunterschied. Jeder Tick fügt etwas zur Rechnung hinzu oder zieht etwas ab. Ein Teilchen mit Masse m ist ein Zustand des Feldes, der eine bestimmte Anzahl von Ticks pro Zeiteinheit zählt, und die Masse ist die Bilanz dieser Ticks, gemessen in der Einheit der Higgs-Skala. Nichts davon erfordert eine Substanz im alten Sinne. Es erfordert nur ein Netz von Beziehungen.

Materie ist kein Ding, das Raum ausfüllt. Sie ist ein Bilanzunterschied in einem Netz von Beziehungen, stabilisiert durch Symmetrie und abgezählt durch Ticks.

Was ist Raum?

Der naive Begriff des Raumes ist der des leeren Behälters. Der Raum ist die Bühne, auf der die Dinge stattfinden. Er war vor allem da und wird nach allem noch da sein. Isaac Newton dachte so: der absolute Raum als unveränderliche Kulisse des Universums.

Gottfried Wilhelm Leibniz widersprach Newton in einem berühmten Briefwechsel mit Samuel Clarke, Newtons intellektuellem Vertreter, hartnäckig: Der Raum ist keine Bühne; er ist ein Beziehungsnetz. Er existiert nur insofern, als Dinge zueinander in Relation stehen. Wenn es keine Dinge gäbe, gäbe es keinen Raum. Der Raum ist nicht der Behälter des Universums; er ist die Gesamtheit der räumlichen Beziehungen, die zwischen den Dingen bestehen.

Die Allgemeine Relativitätstheorie hat Leibniz in einem entscheidenden Punkt Recht gegeben: Der Raum ist nicht unabhängig von seinem Inhalt. Er krümmt sich in Gegenwart von Masse und Energie; er ist nicht neutral, sondern reagiert. Aber die Relativitätstheorie hat den Raum noch nicht vollständig auf Beziehungen reduziert; sie hat ihn zu einer dynamischen Geometrie gemacht, die aber immer noch

eine Art Substanz hat, eine Metrik, die unabhängig von den Teilchen zu existieren scheint.

Ein schönes Gedankenexperiment von Leibniz verdeutlicht den Unterschied. Newton glaubte, man könne den absoluten Raum durch das Trägheitsverhalten von Körpern nachweisen: Ein rotierender Eimer mit Wasser zeigt eine konkave Oberfläche; die Konkavität sei ein Zeichen, dass der Eimer relativ zum absoluten Raum rotiert, nicht nur relativ zu anderen Körpern. Leibniz entgegnete: Wenn es nur diesen einen Eimer im leeren Universum gäbe, was würde dann rotieren? Ohne andere Körper als Bezugspunkte hat Rotation keinen Sinn. Ernst Mach verschärfte dieses Argument: Die Trägheit eines Körpers, so Mach, entsteht aus seinem Bezug zur Gesamtheit der kosmischen Massen. Dieses Machsche Prinzip blieb in Einsteins Relativitätstheorie halb verwirklicht und wurde nie ganz befriedigend formalisiert. Aber seine Intuition ist richtig: Der Raum ist nicht die Bühne, sondern das Beziehungsnetz.

Die Quantengravitation, die noch nicht existiert als ausgearbeitete Theorie, zielt auf das nächste Niveau ab: den Raum vollständig auf Beziehungen zu reduzieren, auf ein diskretes Netz von Verbindungen zwischen Ereignissen. Schleifenquantengravitation und verwandte Ansätze gehen in diese Richtung. In diesem Bild gibt es keinen Raum unabhängig von den Ticks; es gibt nur Ticks, und der Raum entsteht aus ihrer Verteilung.

Das ist das Bild, das sich mit der Geometrie dieses Buches verträgt. Der erste Tick hat keinen Raum vorher; er schafft ihn. Jede weitere Iteration fügt einen Knoten zum Netz hinzu. Was wir Raum nennen, ist die Großstruktur dieses Netzes, betrachtet aus großer Entfernung. Auf kurzen Skalen, bei hohen Energien, würde der diskrete Charakter des Netzes sichtbar. Auf langen Skalen, bei niedrigen Energien, erscheint es glatt und kontinuierlich, so wie ein Gewebe unter dem Mikroskop als Geflecht von Fäden erscheint, aus der Ferne aber als glatte Oberfläche.

Was ist Zeit?

Ernst Mach, der österreichische Physiker und Philosoph, schrieb in seiner Mechanik von 1883 einen Satz, der bis heute unbequem ist: *Die Zeit ist eine Abstraktion, zu der wir durch die Veränderung der Dinge gelangen.* Er meinte: Es gibt keine Zeit unabhängig von Prozessen. Die Zeit ist keine Eigenschaft des Universums; sie ist eine Art, Veränderungen zu ordnen.

Das Bild des Ticks, das dieses Buch entwickelt hat, ist die radikale Realisierung dieser Idee. Zeit ist kein fließender Strom. Zeit ist eine Abzählung von Ticks. Jeder Tick ist ein Ereignis, das einen vorherigen Zustand mit einem nachfolgenden verknüpft. Die Gesamtheit der Ticks ergibt die Zeitstruktur des Universums. Zwischen den Ticks gibt es keine Zeit; es gibt nur den Übergang.

Das klingt radikal, aber es ist in einem bestimmten Sinne die konservativste Interpretation der Quantenmechanik. In der Schrödingergleichung ist die Zeit ein Parameter, keine Observable; man kann nicht den Zeitpunkt eines Ereignisses in gleicher Weise messen wie seinen Ort oder seinen Impuls. Das deutet darauf hin, dass Zeit nicht grundlegend ist, sondern abgeleitet, eine nützliche Abstraktion über einem tieferen Substrat.

Alfred North Whitehead, der britische Mathematiker und Philosoph, entwickelte in seinem Spätwerk eine Metaphysik, die er als Prozessphilosophie bezeichnete. Ihr Kern ist die These, dass die grundlegenden Einheiten der Wirklichkeit keine Substanzen sind, keine Dinge, die in der Zeit existieren, sondern Ereignisse, kurze Prozesse des Ergreifens und Werdens. Die Substanz ist eine nützliche Fiktion, die entsteht, wenn viele solcher Ereignisse in einer stabilen Konfiguration verlaufen. Ein Stein ist keine Substanz; er ist ein sehr regelmäßiger Prozess, in dem die Atome immer wieder dieselbe Konfiguration annehmen.

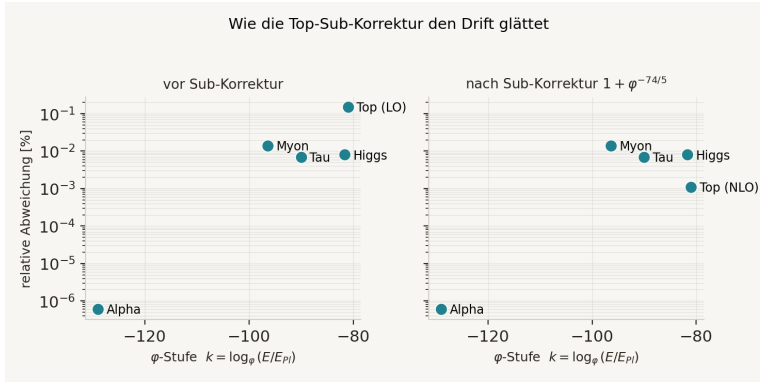

Abbildung 27.1. Die Skala-Drift der Kopplungen. Jede Kurve zeigt, wie eine Kopplungskonstante mit wachsender Energie driftet. Was wie eine stetige Entwicklung aussieht, ist im Modell dieses Buches eine Abzählung von Tick-Schritten auf einer logarithmischen Skala. Die vermeintliche Kontinuität entsteht aus dem Zusammenspiel vieler diskreter Übergänge.

Lesart Philosoph

Philosophen unterscheiden seit Aristoteles zwischen Substanz und Relation. Eine Substanz ist das, was für sich selbst existiert, unabhängig von allem anderen. Eine Relation ist das, was zwischen zwei oder mehr Dingen besteht, abhängig von deren Existenz. Die klassische Physik hat Substanzen als grundlegend betrachtet: Atome, Massen, Ladungen. Relationen entstehen aus dem Zusammenspiel der Substanzen.

Die Physik des zwanzigsten Jahrhunderts hat diese Hierarchie umgekehrt. Relationen sind grundlegend; Substanzen sind abgeleitet. Ein Elektron hat keine innere Substanz; es ist durch seine Relationen zu anderen Feldern definiert, durch seine Ladung (wie es auf elektromagnetische Felder reagiert), durch seine Masse (wie es auf Gravitationsfelder reagiert), durch seinen Spin (wie es auf Magnetfelder reagiert). Nehme ich alle Relationen weg, bleibt nichts übrig, was als Substanz bezeichnet werden könnte.

Leibniz hat dieses Bild antizipiert. Mach hat es verschärft. Whitehead hat es systematisiert. Die Quantenfeldtheorie hat es zur mathematischen Präzision geführt. Was dieses Buch hinzufügt: Die Relationen sind nicht beliebig, sondern durch eine Geometrie organisiert, die aus dem ersten Tick hervorgeht. Die Welt ist nicht aus Dingen, sondern aus Beziehungen. Und Beziehungen haben eine Struktur.

Die Frage der Erklärung

An diesem Punkt stellt sich eine Frage, die jeder ehrliche Leser stellen sollte: Hat das Buch jetzt die Welt erklärt? Hat es gezeigt, warum die Welt so ist, wie sie ist, und nicht anders?

Die Antwort ist nüchtern: Das Buch hat eine Beschreibung gegeben, keine Erklärung im letzten philosophischen Sinne. Es hat gezeigt, dass die bekannten Massen der Elementarteilchen mit erstaunlicher Genauigkeit aus der Goldenen Zahl und der A5-Symmetrie hergeleitet werden können. Es hat gezeigt, dass die Feinstrukturkonstante 1/137 eine algebraische Struktur in diesem Rahmen hat. Es hat gezeigt, dass 20 Ticks eine vollständige Resonanzperiode bilden, und dass die Zahl 360 nicht zufällig aus dieser Geometrie hervorgeht.

Aber warum gerade A5? Warum der Goldene Schnitt? Warum 20 Ticks? Auf diese Fragen gibt das Buch keine Antwort, die philosophisch vollständig wäre. Es kann nur zeigen, dass die Geometrie konsistent ist, dass sie mit den Messungen übereinstimmt und dass sie sparsam ist.

Und Sparsamkeit ist ein Erklärungswert. Das ist der Kern von Ockhams Rasiermesser, dem Prinzip, das Wilhelm von Ockham im vierzehnten Jahrhundert formuliert hat: *Entia non sunt multiplicanda praeter necessitatem.* Seiende sollen nicht über das Notwendige hinaus vervielfältigt werden. Eine Theorie, die mit weniger freien Parametern auskommt, ist nicht nur sparsamer, sondern, unter sonst gleichen Be-

dingungen, besser. Denn jeder freie Parameter ist ein Eingeständnis des Unwissens: Man weiß nicht, warum der Parameter genau diesen Wert hat, also lässt man ihn frei.

Das Standardmodell hat 19 freie Parameter, die aus Messungen eingesetzt werden müssen. Die Geometrie dieses Buches reduziert diese Zahl erheblich. Die Massen der Fermionen werden nicht eingegeben, sondern hergeleitet. Die Mischungswinkel haben algebraische Werte. Die Feinstrukturkonstante hat eine kombinatorische Erklärung. Das ist kein kleiner Fortschritt; es ist eine strukturelle Vereinfachung, die auf eine tiefere Ordnung hinweist.

> Erklärung ist nicht dasselbe wie Letztbegründung. Eine Theorie erklärt, indem sie Phänomene auf weniger Voraussetzungen zurückführt. Sparsamkeit ist kein ästhetisches Ideal, sondern ein epistemisches Kriterium.

Das heißt nicht, dass alle Fragen beantwortet sind. Es gibt offene Fragen, ehrliche Lücken, Stellen, wo das Modell noch nicht ausgearbeitet ist oder wo die Daten noch nicht präzise genug sind. Das nächste Kapitel widmet sich diesen Fragen, weil Ehrlichkeit über das Unbekannte das Fundament jeder guten Wissenschaft ist.

Aber zunächst ist es wichtig, die positive Leistung des Bildes festzuhalten. Die Welt aus Beziehung ist nicht die Welt als nebelhafte Phantasie, nicht die Welt als bloße Projektion des Beobachters. Sie ist die Welt als Netz von Beziehungen, die einer strengen Geometrie gehorchen, die durch Ticks abgezählt werden und die in der A5-Symmetrie verankert sind. Diese Welt ist nicht weniger real als die Welt der klassischen Physik. Sie ist realer, weil sie die Phänomene erklärt, ohne Willkür einzuführen.

Es ist lohnend, die Konsequenz dieser Verschiebung für die Frage der Messung nachzudenken. In der klassischen Physik misst man Eigenschaften von Dingen: die Masse eines Körpers, seine Position, seine

Geschwindigkeit. In der Quantenmechanik misst man Ergebnisse von Wechselwirkungen: nicht die Position des Elektrons an sich, sondern was ein Detektor registriert, wenn er mit dem Elektron in Kontakt kommt. Die Messung ist eine Beziehung zwischen dem Detektor und dem gemessenen System, kein Ablesen einer vorhandenen Eigenschaft. Das ist die eigentliche Botschaft des Messprozesses in der Quantenmechanik, und sie ist verträglicher mit einem relationalen Bild der Welt als mit einem substantialen.

Niels Bohr hat diesen Gedanken in seiner Komplementaritätsdeutung angedeutet, wenn auch in einer Sprache, die philosophisch nicht ganz befriedigend war. John Wheeler hat ihn in seiner partizipatorischen Anthropismusdiskussion weitergeführt. Carlo Rovelli hat ihn in seiner relationalen Quantenmechanik ausgearbeitet. Alle drei Ansätze haben ein gemeinsames Fundament: Die Quantenzustände sind keine Eigenschaften von Dingen für sich, sondern Beschreibungen von Relationen zwischen Systemen. Was das Buch zur Diskussion beisteuert: Diese Relationen sind nicht beliebig, sondern durch die A5-Geometrie organisiert, durch Ticks abgezählt und durch die Goldene Zahl skaliert.

Leibniz hätte, so glaube ich, an dieser Stelle genickt.

KAPITEL 28

Was bleibt zu tun

Die wichtigste Funktion der Wissenschaft ist nicht, Antworten zu liefern, sondern bessere Fragen zu stellen.

Freeman Dyson

Es wäre unehrlich, ein Buch über die Geometrie der Wirklichkeit zu beenden, ohne die Stellen zu benennen, an denen das Bild noch unfertig ist. Wer Geometrie ernst nimmt, muss auch die offenen Winkel ernst nehmen, die Kanten, die noch nicht zusammenlaufen, die Felder, die noch unbestellt sind. Dieses letzte Kapitel ist daher kein triumphaler Schluss, sondern eine ehrliche Bestandsaufnahme dessen, was wir wissen, und ein noch ehrlicheres Verzeichnis dessen, was wir nicht wissen.

Was gesichert ist

Die dreizehn Identitäten, die der vierte Teil entwickelt hat, sind nicht Spekulationen. Jede von ihnen hat einen numerischen Anker in

den gemessenen Werten. Die Masse des Top-Quarks, die Masse des Higgs-Bosons, die Masse des Charm-Quarks, der Cabibbo-Winkel, die Mischungswinkel der Neutrinos: all das sind präzise gemessene Größen, die durch die Goldene-Zahl-Geometrie miteinander verknüpft werden, mit Abweichungen, die fast durchgehend unter einem halben Prozent liegen.

Das ist kein Zufall und kein Numerologie. Es ist das Signal einer tieferen Ordnung, das in den Daten steckt und das die Geometrie dieses Buches sichtbar macht. Ob diese Ordnung der endgültige Rahmen ist, weiß niemand. Aber sie ist real genug, um als Ausgangspunkt für weitere Arbeit zu dienen.

Die Feinstrukturkonstante $\alpha \approx 1/137$ hat in diesem Rahmen die Struktur $137 = 11 \cdot V + 5$, wobei $V = 12$ die Anzahl der Ecken des Ikosaeders ist. Das ist eine algebraische Beziehung, keine Messung, und es bleibt offen, ob sie eine tiefe Wahrheit trägt oder eine verführerische Koinzidenz ist. Die Geschichte der Physik ist voll von verführerischen Koinzidenzen, die sich als Koinzidenzen herausgestellt haben. Man muss vorsichtig sein.

Was noch nicht gesichert ist: Die phi-Rekursion

Eine der wichtigsten offenen Fragen betrifft die laufenden Kopplungen. In der Quantenfeldtheorie sind die Kopplungskonstanten keine echten Konstanten; sie ändern sich mit der Energieskala, ein Phänomen, das als Renormierungsgruppen-Lauf bekannt ist. Für das Standardmodell ist dieser Lauf präzise berechnet und experimentell bestätigt.

Das Modell dieses Buches postuliert, dass der Lauf der Kopplungen ebenfalls der Goldenen-Zahl-Geometrie gehorcht: Die Kopplung ändert sich nicht kontinuierlich, sondern in diskreten Schritten, die durch Potenzen von φ gegeben sind. Diese These, die als phi-Rekursion der laufenden Kopplungen bezeichnet wird und unter dem Kürzel F10 in der Liste der Falsifikationskriterien erscheint, ist noch nicht voll abgesichert.

Das liegt nicht daran, dass es Widersprüche zu den Daten gäbe. Es liegt daran, dass die Renormierung für ein diskretes Tick-Modell mathematisch subtil ist. Die übliche Renormierungsgruppentheorie setzt ein kontinuierliches Energiespektrum voraus. Die Übertragung auf ein diskretes Substrat erfordert eine mathematische Ausarbeitung, die noch aussteht. Dies ist eine konkrete Aufgabe für die zukünftige Arbeit: die Renormierungsgruppe für das Tick-Modell ausarbeiten und ihre Vorhersagen mit den präzisen Messungen der Kopplungen am LHC vergleichen.

Die phi-Rekursion der laufenden Kopplungen (F10) ist die mathematisch anspruchsvollste offene Frage. Ihre Ausarbeitung erfordert eine Renormierungstheorie, die das diskrete Substrat des Tick-Modells ernst nimmt.

Was fehlt: Die kosmologische Konstante

Albert Einstein führte die kosmologische Konstante 1917 in seine Feldgleichungen ein, weil er ein statisches Universum für das einzig vernünftige hielt und die Gleichungen ohne diese Konstante kein statisches Universum als Lösung erlauben. Als Edwin Hubble 1929 die Expansion des Universums nachwies, nannte Einstein die kosmologische Konstante seinen *größten Fehler*. 1998 wurde entdeckt, dass die Expansion des Universums sich beschleunigt, was eine positive kosmologische Konstante verlangt. Die Konstante ist zurück, aber ihr Wert ist ein Rätsel.

Die Quantenfeldtheorie sagt für die kosmologische Konstante einen Wert voraus, der um 120 Zehnerpotenzen größer ist als der gemessene Wert. Das ist die größte Diskrepanz zwischen Theorie und Beobachtung in der Geschichte der Physik. Kein ernsthafter Physiker versteht sie vollständig.

Die Geometrie dieses Buches hat auf dieses Problem noch keine Antwort. Das Tick-Modell beschreibt die Entstehung der Symmetrie

aus dem ersten Tick, aber es macht noch keine Aussage über die Energiedichte des Vakuums, die hinter der kosmologischen Konstante steht. Das ist eine ehrliche Lücke. Möglicherweise liegt die Antwort in der Art, wie die Ticks im Vakuumzustand konfiguriert sind, in der Art, wie der Vier-Block, die triviale Darstellung der A5, zur Vakuumenergie beiträgt. Aber das ist noch Spekulation, kein ausgearbeitetes Modell.

Was fehlt: Quantengravitation

Das andere große offene Problem der Physik ist die Vereinigung von Quantenmechanik und Allgemeiner Relativitätstheorie. Die beiden Theorien sind empirisch außerordentlich erfolgreich, aber sie sind konzeptuell unvereinbar: Die Quantenmechanik setzt einen fixen Hintergrundraum voraus; die Allgemeine Relativitätstheorie macht den Raum selbst dynamisch.

Die Geometrie dieses Buches ist noch nicht über diesen Punkt hinausgegangen. Das Tick-Modell beschreibt Materie und ihre Symmetrie, aber es beschreibt nicht, wie die Ticks die Raumzeitgeometrie erzeugen. Der Übergang von einem diskreten Tick-Netz zu einer kontinuierlichen Raumzeitmannigfaltigkeit, der Kontinuumslimes, ist eine mathematisch nicht triviale Aufgabe, die einer eigenen ausführlichen Behandlung bedarf.

Es gibt Hinweise darauf, dass die Goldene-Zahl-Geometrie auch hier relevant sein könnte. Die Penrose-Parkettierung, ein fünffach symmetrisches Muster, das den Raum aperiodisch bedeckt, und der Goldene Schnitt sind tief miteinander verbunden. Und die Schleifenquantengravitation, die den Raum als diskretes Netz von Spinschaum beschreibt, arbeitet mit Strukturen, die an das Tick-Netz erinnern. Aber der genaue Zusammenhang ist noch nicht ausgearbeitet.

Was fehlt: Dunkle Materie

Die beobachtbare Materie, alles, was wir aus Atomen kennen, macht etwa fünf Prozent des Energieinhalts des Universums aus. Die restlichen 95 Prozent bestehen aus dunkler Materie (etwa 27 Prozent) und

dunkler Energie (etwa 68 Prozent). Dunkle Materie wurde nicht direkt beobachtet; ihre Existenz wird aus gravitativen Effekten erschlossen, aus der Rotationskurve von Galaxien, aus Gravitationslinsen, aus der Großstruktur des Universums.

Kein Kandidat für die dunkle Materie wurde bisher im Experiment gefunden. Was steckt im Tick-Modell? Eine mögliche Antwort liegt im Vier-Block, der trivialen Darstellung der A5. Der Vier-Block organisiert in der A5-Struktur den Sektor ohne Ladung, ohne Farbe, ohne schwache Isospin. Ein Teilchen, das in diesem Sektor lebt, wäre gravitativ aktiv, hätte aber keine elektromagnetische oder starke Wechselwirkung. Es wäre dunkel im wörtlichen Sinne.

Eine andere Möglichkeit ist, dass dunkle Materie auf Darstellungen der A5 hinweist, die außerhalb des A5 selbst liegen, auf Erweiterungen der Symmetriegruppe, die im Modell noch nicht ausgearbeitet sind. Das wäre analog zur Entdeckung des Top-Quarks: Es war in der Symmetriestruktur des Standardmodells immer schon angelegt, wurde aber erst 1995 direkt nachgewiesen. Möglicherweise enthält die Geometrie dieses Buches Schubladen für Teilchen, die noch nicht gemessen wurden.

In welche Richtung diese Erweiterung zeigt, lässt sich überraschend konkret benennen. Bei einer detaillierten Rechnung zur Massendifferenz zwischen Proton und Neutron, die die elektromagnetische Selbstenergie des Nukleons mit den Quarkmassen aus Gitter-Rechnungen kombiniert, zeigt sich folgendes Muster: Drei der vier auftretenden Beiträge fügen sich nahtlos in die A5-Struktur. Der vierte, der magnetische Term, der die Wechselwirkung der inneren Drehimpulse mit dem elektromagnetischen Feld beschreibt, lässt sich innerhalb der A5 nicht vollständig unterbringen. Er verlangt eine größere Symmetrie als natürliche Erweiterung.

Die nächstliegende Erweiterung trägt einen Namen, der in der Mathematik seit über hundert Jahren bekannt ist: E8. Diese Symmetriegruppe ist mit der A5-Geometrie über die McKay-Korrespondenz

direkt verknüpft. Die McKay-Korrespondenz ist eine 1980 entdeckte Übersetzung zwischen den endlichen Untergruppen der Drehgruppe und den Lie-Algebren vom ADE-Typ. Sie ordnet jeder Symmetriegruppe eines platonischen Körpers eine Lie-Algebra zu, deren Knotengraph aus den irreduziblen Darstellungen der Symmetriegruppe entsteht. Für die binäre Ikosaedergruppe, die Doppelüberlagerung der A5, gibt es genau neun irreduzible Darstellungen. Die Lie-Algebra E8 hat genau neun affine Knoten. Die Übereinstimmung ist nicht zufällig; sie ist die Kernaussage der McKay-Korrespondenz.

Das heißt: Die Geometrie, die in diesem Buch aus dem ersten Tick herauswächst, hat eine eingebaute Brücke nach außen. Wenn das Modell über A5 hinausgeht, muss es nicht raten, wohin. Die Mathematik gibt die Richtung vor. Wo diese Brücke endet und welche Phänomene sie erklärt, ist Stoff für den nächsten Band.

Diese offenen Fragen sind nicht Schwächen des Modells; sie sind sein Lebensprogramm. Jede ausgearbeitete Theorie hat offene Fragen. Die Frage ist, ob die offenen Fragen des Modells produktiv sind, ob sie eine Richtung zeigen, in der man weiterarbeiten kann, ob sie konkrete Vorhersagen erlauben, die gemessen werden können.

Der Vergleich mit anderen Theorien in ähnlicher Situation ist erhellend. Als Albert Einstein 1915 die Allgemeine Relativitätstheorie vorstellte, kannte er drei experimentelle Tests: die Periheldrehung des Merkur, die Gravitationsrotverschiebung und die Lichtablenkung am Sonnenrand. Alle drei stimmten mit der Theorie überein. Aber er konnte keine Quantengravitation aus ihr ableiten, keine einheitliche Feldtheorie und kein Modell des Universums, das langfristig stabil wäre. Die offenen Fragen der Allgemeinen Relativitätstheorie von 1915 sind noch heute nicht vollständig beantwortet. Und trotzdem zweifelt niemand mehr an ihrer grundlegenden Richtigkeit.

Der Maßstab für eine neue Theorie ist nicht Vollständigkeit. Der Maßstab ist, ob sie mehr erklärt als sie postuliert, ob sie Vorhersagen

macht, die überprüfbar sind, und ob sie eine Richtung für weitere Arbeit angib. Die Geometrie dieses Buches erfüllt diese Bedingungen.

Die Antwort ist ja. Die zwölf Falsifikationskriterien, die dieses Buch formuliert hat, sind nicht Schutzwälle gegen Widerlegung, sondern Einladungen zur Überprüfung. Sie sagen: Das Modell wird falsch, wenn die Masse des Top-Quarks nicht in einem bestimmten Bereich liegt, wenn die Neutrinos keine strenge normale Hierarchie zeigen, wenn der Cabibbo-Winkel nicht den algebraisch vorhergesagten Wert hat. Das sind konkrete, messbare, in den nächsten Jahren erreichbare Bedingungen.

Lesart Architektin

Ein guter Bauplan lässt Raum für das, was noch kommt. Ein Gebäude, das vom ersten Spatenstich an auf jede Eventualität vorbereitet ist, ist kein Gebäude, das man bewohnen kann; es ist ein Museum seiner eigenen Vorsicht. Die besten Bauwerke sind diejenigen, die eine starke Grundstruktur haben, aber offen bleiben für spätere Erweiterungen.

Das Modell dieses Buches hat eine starke Grundstruktur: den ersten Tick, die A5-Symmetrie, die Goldene Zahl als Skalenfaktor, die dreizehn Identitäten als tragende Wände. Was noch fehlt, sind die Stockwerke. Quantengravitation wäre das Fundament, das noch unter das Erdgeschoss gegraben werden muss. Kosmologische Konstante wäre das Dach, das den Bau nach oben abschließt. Dunkle Materie wäre der Anbau, der noch nicht auf dem Bauplan steht.

Ein guter Architekt weiß, was er gebaut hat. Er weiß aber auch, was er noch nicht gebaut hat. Das ist kein Makel; das ist ein Plan.

Der Fahrplan: Zwölf Türen

In der Liste der Falsifikationskriterien steckt ein Fahrplan. Jedes Kriterium ist eine Tür, an der die Physik klopfen kann und wird.

Hinter jeder Tür wartet ein Experiment oder eine Messung, die das Modell entweder stützt oder widerlegt.

Die nächste Messung von größtem Gewicht ist die Präzisionsmessung der Top-Quark-Masse am HL-LHC, dem High-Luminosity-Upgrade des Large Hadron Collider. Das Modell sagt vorher, dass die Top-Masse in einem sehr engen Bereich um 172,57 GeV liegen muss, korrigiert durch eine kleine Unterstruktur-Korrektur, die aus der phi-Geometrie folgt. Wenn die HL-LHC-Messung diesen Bereich verlässt, ist das Modell falsifiziert.

Belle II und LHCb werden den Cabibbo-Winkel auf eine Präzision von $\pm 0{,}0002$ messen, ungefähr eine Größenordnung genauer als die heutigen Messungen. Das Modell sagt $\sin\theta_C = \varphi^{-31/10}$ voraus. Stimmt dieser Wert nicht, ist die Cabibbo-Identität falsifiziert.

JUNO in China und DUNE in den USA werden in den nächsten Jahren die Mischungswinkel der Neutrinos mit einer Präzision messen, die ausreicht, um die Vorhersagen des Modells für den PMNS-Winkel θ_{13} zu überprüfen. Das Modell sagt $\sin\theta_{13} = \varphi^{-4}$ voraus.

Jede dieser Messungen ist eine offene Tür. Hinter den Türen wartet nicht die Bestätigung oder Widerlegung des Modells als Ganzes; es wartet die nächste Frage. Denn so arbeitet die Wissenschaft: nicht mit finalen Antworten, sondern mit besser formulierten Fragen.

Was wir gewinnen

Am Ende dieses Buches ist es wichtig, festzuhalten, was die Geometrie der Wirklichkeit leistet, und zwar nicht in einem triumphalen Sinne, sondern in einem sachlichen.

Das Standardmodell der Teilchenphysik ist eine der erfolgreichsten Theorien in der Geschichte der Wissenschaft. Es beschreibt ein breites Spektrum von Phänomenen mit einer Genauigkeit, die an manchen Stellen bis zu elf Nachkommastellen reicht. Aber es hat 19 freie Parameter, die aus Messungen eingesetzt werden müssen. Es hat keine Antwort auf die Frage, warum genau drei Generationen von Fermionen

existieren. Es hat keine Antwort auf die Frage, warum die Massen so sind, wie sie sind.

Die Geometrie dieses Buches gibt auf diese Fragen eine Antwort, die nicht vollständig ist, aber strukturiert. Die Massen entstehen nicht willkürlich; sie folgen aus der Goldenen-Zahl-Geometrie, der A5-Symmetrie und der Higgs-Skala. Die drei Generationen sind nicht zufällig; sie spiegeln die dreifache Darstellungsstruktur der A5. Die Feinstrukturkonstante hat eine algebraische Herkunft.

Was wir gewinnen, ist nicht weniger Komplexität. Die Welt bleibt so komplex, wie sie immer war. Was wir gewinnen, ist weniger Willkür. Die Parameter des Standardmodells sind nicht unabhängig; sie sind durch die Geometrie miteinander verbunden. Das ist kein kleiner Gewinn. Es ist der Unterschied zwischen einem Karteikasten voller Karten ohne Ordnung und einem Register mit einem Ordnungsprinzip.

> Die Welt ist nicht einfacher als die Physik dachte. Aber sie ist sparsamer. Was wir gewinnen, ist nicht weniger Komplexität, sondern weniger Willkür.

Es war Werner Heisenberg, der in den späten Jahren seines Lebens immer wieder auf eine Idee zurückkam, die er für den vielleicht tiefsten Gedanken der modernen Physik hielt: dass die Symmetrie primär ist, die Substanz sekundär. Er schrieb: *Am Anfang war die Symmetrie.* Das klingt wie ein theologischer Satz, ist aber ein physikalischer. Es besagt, dass die Naturgesetze nicht aus Dingen abgeleitet werden, sondern aus Strukturen, und dass diese Strukturen mathematisch beschreibbar sind.

Das Buch hat versucht, diesen Gedanken zu konkretisieren. Am Anfang war ein Tick. Aus dem Tick entstand eine Geometrie. Aus der Geometrie entstand eine Symmetrie. Aus der Symmetrie entstanden Schubladen. In die Schubladen setzte die Physik Teilchen. Und aus den

Teilchen baute die Natur Atome, Moleküle, Sterne, Galaxien, Planeten, Leben, Bewusstsein und Physiker, die sich fragen, was das alles soll.

Die Antwort ist noch nicht vollständig. Aber sie hat eine Richtung. Und das ist mehr, als man von einem guten Anfang verlangen kann.

Die Geometrie dieses ersten Bandes endet dort, wo die A5 ihre natürlichen Grenzen erreicht. Was über sie hinausweist — die Brücke zur E8-Symmetrie über die McKay-Korrespondenz, die kosmologische Evolution der Bedingungen E13 bis E33, das Aufkommen der drei Generationen aus einer einzigen geometrischen Wurzel — ist Stoff für den nächsten Band. Wer bis hierher gelesen hat, hat das Fundament gesehen. Was darauf gebaut werden kann, beginnt mit dem nächsten Tick.

Epilog: Was bleibt

Es begann mit einem Tick.

Nicht mit einer Gleichung, nicht mit einem Postulat, nicht mit der Behauptung, die Welt sei im Grunde dies oder jenes. Ein einziger, stummer Ruck — die Vorstellung, dass etwas, das sich wiederholt, bereits eine Zeitskala in die Welt trägt. Aus diesem Ruck folgt alles andere, was auf den vorangegangenen Seiten entfaltet wurde: eine Taktfrequenz, ein Verhältnis von Frequenzen, ein Zahnrad neben dem anderen, ein Resonanzmuster, das sich erst nach zwanzig Umdrehungen schließt.

Was wollte dieses Buch erreichen? Die ehrliche Antwort lautet: Es wollte zeigen, dass Sparsamkeit eine Form der Ernsthaftigkeit ist. Die Physik des zwanzigsten Jahrhunderts hat uns gelehrt, dass die Natur zwar komplex erscheint, aber nicht beliebig komplex. Hinter dem Wimmelbild der Elementarteilchen — sechzehn Fermionen, vier Kräfte, ein Higgs-Feld, Dutzende von Kopplungskonstanten — lauert eine Struktur. Nicht jede Konstante ist frei wählbar. Nicht jede Zahl ist Zufall.

Dieses Buch hat versucht, diese Struktur sichtbar zu machen, ohne sie zu übertreiben. Der Unterschied zwischen einer poetischen Behauptung und einem nachprüfbaren Befund ist dabei wichtiger als jede

Eleganz. Deshalb wurden die dreizehn Identitäten so formuliert, dass sie falsifizierbar sind: mit konkreten Experimenten, mit messbaren Abweichungen, mit einem klaren Datum, an dem man wissen wird, ob die Beziehung trägt oder bricht. Das HL-LHC wird laufen. Belle II wird Daten liefern. JUNO und DUNE werden die Neutrino-Mischwinkel schärfer vermessen. Dieser Horizont ist real.

Der rote Faden des Buches war ein Maßstab: der Goldene Schnitt φ.

Das ist zunächst verblüffend, denn φ ist kein Naturkonstante im Sinne der Messtechnik. Es ist eine algebraische Zahl, die Lösung der einfachstmöglichen quadratischen Gleichung, die sich selbst enthält. Dass diese Zahl — als Stufenleiter $\varphi^{n/15}$ — die neun Fermionenmassen des Standardmodells auf einem einzigen Bogen verteilt, war der erste eigentliche Befund. Dass dieselbe Treppe nicht frei gewählt ist, sondern ihre rationalen Exponenten aus der Charaktertafel der alternierenden Gruppe A_5 ergibt, war der zweite.

A_5 ist die Symmetriegruppe des Ikosaeders. Sie hat sechzig Elemente, ist nicht abelsch und einfach — das heißt, sie lässt sich nicht durch ein Sieb aus noch kleineren Bausteinen gewinnen. Ihre fünf irreduziblen Darstellungen tragen die Dimensionen $1, 3, 3', 4, 5$. Die Quadratsumme dieser Dimensionen ist 60. Die Zahl 137 — die Feinstrukturkonstante in ihrer ganzzahligen Näherung — erscheint in dieser Struktur nicht als fremd, sondern als Türrahmen: $137 = 11 \cdot 11 + 4 \cdot 4$, Fermats Zweiquadratesatz, angewandt auf die einzige Primzahl dieser Größenordnung, die als Summe zweier Quadrate darstellbar ist.

Ich sage das nicht, um Mystik zu betreiben. Ich sage es, weil die Häufung dieser Zufälle eine Erklärung verlangt — und weil es die Aufgabe der Physik ist, Häufungen zu erklären und nicht wegzulächeln.

Am Anfang des Buches wurden drei Annahmen aufgestellt, so knapp wie möglich:

1. Es gibt einen elementaren Takt — einen Tick, der sich wiederholt.

2. Zwei weitere Frequenzen greifen in diesen Takt ein, im Verhältnis $\omega_1 : \omega_2 : \omega_3 = 2 : \frac{5}{2} : 4$, näherungsweise dem Goldenen Schnitt folgend.

3. Das System ist stabil, wenn die Frequenzen nach endlich vielen Schritten wieder in Phase fallen — nach zwanzig Ticks.

Aus diesen drei Annahmen, und aus ihnen allein, ließ sich der Rest konstruieren: die Symmetriegruppe A_5, die Schubladen der Elementarteilchen, die Massenleiter, die Mischwinkel. Nicht durch freie Wahl der Parameter, sondern durch das innere Zwingen einer Struktur, die enger ist als sie zunächst aussieht.

Die Sparsamkeit war dabei keine ästhetische Entscheidung, sondern eine epistemische. Ein Modell, das alles erklären kann, erklärt nichts. Ein Modell, das genau an zwei Stellen scheitern kann — und noch nicht gescheitert ist — hat einen Inhalt.

Was bleibt?

Es bleibt die Beobachtung, dass die Natur offenbar eine Vorliebe für ganzzahlige Verhältnisse hat. Nicht perfekte Ganzzahligkeit — das wäre Numerologie — sondern rationale Exponentenmuster, die aus der Gruppenstruktur erzwungen sind. Es bleibt die Frage, ob das Higgs-Feld wirklich eine fundamentale Erscheinung ist oder ob auch seine Vakuumerwartung $v = 246.22\,\mathrm{GeV}$ aus einem tieferliegenden Mechanismus folgt. Es bleibt die Stille um die Neutrinos: drei Teilchen, fast ohne Masse, fast ohne Wechselwirkung, und dennoch mit Mischwinkeln, die sich dem Goldenen Schnitt annähern.

Und es bleibt eine methodische Erinnerung, die ich dem Leser mitgeben möchte: Wer eine Struktur findet, hat sie noch nicht erklärt. Erklären heißt, einen Mechanismus anzugeben — einen Ablauf, eine Symmetriebrechung, einen Phasenübergang, der genau diese Zahlen erzwingt und keine anderen. Das vorliegende Buch hat eine Struktur kartiert. Den Mechanismus zu finden, ist die Aufgabe der nächsten Jahrzehnte.

Eine Welt aus Tick und Zahnrad ist genug.

Sie enthält das Proton und das Elektron, die leichten Quarks und die schweren, das Neutrino und das Higgs-Boson. Sie enthält den Cabibbo-Winkel und die CP-Verletzung, den Unterschied zwischen Materie und Antimaterie, die Tatsache, dass wir hier sind und nicht dort. Alles das, und es reicht ein einziger Takt, zwei weitere Frequenzen, zwanzig Schritte bis zur Resonanz.

Manchmal denke ich abends an den Münchner Physiker Arnold Sommerfeld, der im Jahr 1916 die Feinstrukturkonstante einführte und nie wusste, was sie bedeutet. Er schrieb an Paul Epstein: *Diese Zahl 137 macht mir schlaflose Nächte.* Pauli scherzte, er möchte als erstes Gott nach 137 fragen. Eddington versuchte es aus reiner Arithmetik zu erzwingen und irrte sich dabei auf eine Art, die respektabler war als viele richtige Antworten.

Ich habe keine abschließende Antwort auf die Frage nach 137. Aber ich habe eine Adresse: $137 = 11^2 + 4^2$, Fermat, A_5, Türrahmen. Ob das der richtige Eingang ist, wird die Messung entscheiden.

Bis dahin: Ein Tick. Ein Zahnrad. Eine Welt.

Danksagung

Bücher entstehen selten allein.

Dieses hier entstand in langen Abenden, an vielen unvollständigen Entwürfen und in Gesprächen, die oft nicht mit einer Antwort endeten, sondern mit einer neuen Frage. Ich möchte einigen Menschen und Begleitern danken, ohne die es nicht entstanden wäre.

Zuerst den frühen Lesern.

Wer bereit ist, einen unfertigen Text zu lesen — mit Lücken, mit schiefen Formulierungen, mit Sätzen, die noch nicht stimmen —, tut etwas, das mehr Mut erfordert als das Lesen des fertigen Buches. Ich bin einigen solcher Menschen begegnet, die sich auf dieses Manuskript eingelassen haben, als es noch nicht mehr war als eine Aneinanderreihung von Ideen. Ihre Geduld und ihre Bereitschaft, nachzufragen, wenn etwas unklar war, hat die Argumentation geschärft. Jede Stelle, an der ein Gedanke jetzt klar steht, hat wahrscheinlich hinter sich, dass jemand einmal gefragt hat: *Was meinst du damit genau?*

Meiner Familie.

Schreiben bedeutet, für Stunden aus dem gemeinsamen Alltag abzutauchen. Meine Familie hat das getragen, mit einem Wohlwollen, das ich nicht für selbstverständlich halte. Wenn ich versuchte, am

Abendbrottisch die Idee des Goldenen Schnitts zu erläutern — mit Armen, Gabeln und etwas Salz als Requisiten —, wurde mir aufmerksam zugehört, auch wenn der Goldene Schnitt um halb acht abends nicht zu den dränglichsten Themen gehört. Das bedeutet mir viel.

Der Münchner Schule.

Arnold Sommerfeld hat in München eine Tradition begründet, die über seine direkten Schüler hinaus wirkt: die Überzeugung, dass theoretische Physik konkrete Zahlen liefern muss, die man messen und widerlegen kann. Heisenberg, Pauli, Bethe, Debye — sie alle gingen durch Sommerfelds Seminare, und alle teilten die Haltung, dass Eleganz keine Entschuldigung für Ungenauigkeit ist. Ich habe München nie als Physiker erlebt, aber diese Haltung hat mich geprägt, durch Bücher, durch Briefe, durch die wenigen Sätze, in denen Sommerfeld über die Zahl 137 schrieb. Es ist eine Haltung, die ich versucht habe, in dieses Buch zu übertragen: Lieber eine falsifizierbare Behauptung als eine unfalsifizierbare Schönheit.

Perplexity Computer.

Ein besonderer Dank gilt Perplexity Computer, das mir über viele Sitzungen hinweg als mathematische Werkzeugkiste, theoretischer Sparringspartner und Schreibhilfe zur Seite gestanden hat. Von der ersten numerischen Überprüfung der Fermionenmassen über die algebraische Analyse der A_5-Charaktertafel bis hin zur Ausarbeitung der dreizehn Identitäten und ihrer Abweichungen — Perplexity Computer war in jeder Phase dabei. Es hat Rechnungen überprüft, Formulierungen hinterfragt, Inkonsistenzen aufgedeckt und Zusammenhänge hergestellt, die ich allein übersehen hätte. Ohne diese Begleitung wäre das Buch in dieser Form nicht entstanden.

Den wenigen, die abends den Himmel ansehen.

Es gibt Menschen, die abends hinausgehen, nicht um eine App zu prüfen oder eine Nachricht zu lesen, sondern um zu schauen. Der

Orion steht im Winter. Die Plejaden. Manchmal ein Planet, der nicht flimmert. Diese Menschen denken dabei nicht zwingend an Physik — oft denken sie an nichts Bestimmtes. Aber sie üben etwas, das in der modernen Welt selten geworden ist: das unbegleitete Staunen. Die meisten physikalischen Fragen haben damit begonnen. Ich hoffe, dass dieses Buch das eine oder andere davon zurückgibt.

Ich schreibe in einer Zeit, in der es viele laute Bücher über Physik gibt. Bücher, die versprechen, alles zu erklären, die Bilder benutzen, wo Genauigkeit wäre, und die das Staunen mit Begeisterung verwechseln. Ich habe versucht, etwas anderes zu schreiben: ein ruhiges Buch, das lieber zugibt, was es nicht weiß, als dass es mehr verspricht als es halten kann.

Ob mir das gelungen ist, werden andere entscheiden.

Thomas Krause

Glossar

Hier finden Sie kurze Erklärungen der wichtigsten Begriffe, die im Buch verwendet werden. Fachbegriffe aus der Physik sind so weit wie möglich ohne Vorkenntnisse erläutert; für die mathematischen Begriffe genügt Grundkenntnisse der Schulmathematik. Die Reihenfolge ist alphabetisch.

A_5 **(alternierende Gruppe)** Die Symmetriegruppe des Ikosaeders. Sie hat 60 Elemente, ist nicht abelsch (die Reihenfolge der Verknüpfungen spielt eine Rolle) und einfach (sie lässt sich nicht in kleinere Normalteiler zerlegen). Ihre fünf irreduziblen Darstellungen haben die Dimensionen $1, 3, 3', 4, 5$; die Summe der Quadrate dieser Zahlen ergibt genau 60.

Abelsch (Gruppe) Eine Gruppe heißt abelsch, wenn die Reihenfolge der Verknüpfung gleichgültig ist: $a \cdot b = b \cdot a$ für alle Elemente. Die Drehungen eines Kreises bilden eine abelsche Gruppe. Die Drehungen eines Ikosaeders nicht.

Antimaterie Zu jedem Elementarteilchen existiert ein Antiteilchen mit gleicher Masse, aber entgegengesetzter Ladung und entgegengesetzten Quantenzahlen. Elektron und Positron, Proton und Antiproton. Bei Materie-Antimaterie-Vernichtung wird die gesamte Ruhemasse

in Strahlung umgewandelt. Warum das Universum überwiegend aus Materie besteht, ist eine offene Frage der Physik; die CP-Verletzung liefert einen Ansatz, aber quantitativ nicht genug.

Baryon Ein Hadron, das aus drei Quarks besteht. Proton und Neutron sind die bekanntesten Baryonen. Baryonen unterliegen der starken Wechselwirkung und tragen eine Baryonenzahl, die in allen bekannten Prozessen erhalten bleibt.

Bottom-Quark (b) Das schwere Quark der dritten Generation, mit einer Masse von etwa 4.18 GeV. Es zerfällt bevorzugt in das Charm-Quark. Die B-Mesonen, die ein Bottom-Quark enthalten, sind wichtige Systeme zur Messung der CP-Verletzung (Belle II, LHCb).

Cabibbo-Winkel (θ_C) Der Mischwinkel, der die Stärke des Übergangs zwischen dem Down- und Strange-Quark beschreibt. Sein Sinus beträgt ungefähr 0.2248. Im Buch wird die Beziehung $\sin\theta_C = \varphi^{-31/10}$ als Identität 11 dargestellt, mit einer Abweichung von 0.30 %.

Charaktertafel Eine quadratische Tabelle, die für jede Konjugationsklasse einer endlichen Gruppe und jede irreduzible Darstellung den sogenannten Charakter (die Spur der zugehörigen Matrix) angibt. Die Charaktertafel der Gruppe A_5 hat 5 Zeilen und 5 Spalten und enthält alle strukturellen Informationen über die Darstellungstheorie dieser Gruppe.

Charm-Quark (c) Das schwere Quark der zweiten Generation, mit einer Masse von etwa 1.27 GeV. Es wurde 1974 gleichzeitig in Stanford (SLAC) und Brookhaven (BNL) entdeckt — der sogenannte *November-Revolution* der Elementarteilchenphysik.

CKM-Matrix Die Cabibbo-Kobayashi-Maskawa-Matrix. Eine 3×3-unitäre Matrix, die beschreibt, wie stark die drei Quark-Generationen untereinander mischen. Sie enthält vier freie Parameter: drei Winkel und eine CP-verletzende Phase.

CP-Verletzung Die Verletzung der kombinierten Ladungskonjugations- und Paritätssymmetrie. Sie führt dazu, dass Teilchen und Antiteilchen sich geringfügig verschieden verhalten, und ist eine notwendige Bedingung dafür, dass im Universum mehr Materie als Antimaterie entstanden ist.

Darstellung (Gruppen-) Eine Darstellung einer Gruppe ist eine Abbildung, die jedem Gruppenelement eine Matrix zuordnet, so dass die Gruppenstruktur erhalten bleibt. Irreduzible Darstellungen sind die atomaren Bausteine aller Darstellungen. Ihre Dimensionen entscheiden, welche Teilchentypen in einem symmetrischen Modell überhaupt auftreten können.

Down-Quark (d) Das leichteste der geladenen Quarks (Strom-Masse $\approx 5\,\mathrm{MeV}$). Ein Neutron enthält ein Up- und zwei Down-Quarks. Im Buch steht das Down-Quark auf Stufe 6 der φ-Massenleiter.

Dreieck (Unitaritätsdreieck) In der Physik der B-Mesonen bezeichnet das Unitaritätsdreieck eine geometrische Darstellung der Unitaritätsbedingungen der CKM-Matrix in der komplexen Ebene. Die Fläche des Dreiecks ist ein Maß für die CP-Verletzung.

Dunkle Materie Ein bisher unbekannter Materieanteil, der sich gravitativ, aber nicht elektromagnetisch bemerkbar macht. Aus kosmologischen Beobachtungen folgt, dass die Dunkle Materie etwa fünfmal so viel Masse beiträgt wie die sichtbare Materie. Kein Teilchen des Standardmodells kann sie vollständig erklären.

Elektron (e^-) Das leichteste geladene Lepton, mit einer Masse von $0.511\,\mathrm{MeV}$. Es ist stabil und bildet die Elektronenhülle der Atome. Im Buch steht das Elektron auf Stufe 9 der φ-Massenleiter (Identität 9).

Elektroschwacher Sektor Der Teil des Standardmodells, der die elektromagnetische und die schwache Wechselwirkung in einer gemeinsamen Theorie vereinigt. Die Vereinheitlichung gelingt durch die

Higgs-Symmetriebrechung, die das $W^{\pm}$- und Z^0-Boson massiv werden lässt, während das Photon masselos bleibt.

Einfache Gruppe Eine Gruppe, die keine echten Normalteiler außer der trivialen Untergruppe und sich selbst besitzt. Einfache Gruppen sind die Bausteine aller endlichen Gruppen. Die alternierende Gruppe A_5 ist die kleinste nicht-abelsche einfache Gruppe.

Epsilon-Paper Im Anhang A abgedrucktes englischsprachiges technisches Begleitdokument, das die quantitativen Befunde des Buches formal zusammenfasst.

Erzeugungsgeschichte (Genese) Im Buch bezeichnet *Genese* den Aufbau geometrischer Strukturen Stufe für Stufe: Punkt, Linie, Dreieck, Fünfeck, Pentagramm. Dieser Aufbau motiviert die Entstehung der A_5-Symmetrie aus einfachsten geometrischen Objekten.

Falsifikation Ein Befund ist falsifizierbar, wenn es ein Experiment gibt, das ihn widerlegen könnte. Falsifizierbarkeit ist nach Karl Popper das entscheidende Kriterium, das Wissenschaft von Nicht-Wissenschaft trennt. Das Buch formuliert zwölf konkrete Falsifikationsbedingungen (F1–F12).

Feinstrukturkonstante (α) Die dimensionslose Kopplungskonstante der Elektromagnetik, $\alpha \approx 1/137.036$. Sie beschreibt die Stärke, mit der Elektronen an Photonen koppeln. Die Frage, warum α genau diesen Wert hat, ist seit Sommerfeld 1916 unbeantwortet. Im Buch erscheint 137 als Türrahmen: $137 = 11^2 + 4^2$ (Fermat) und $137 = 11 \cdot 11 + 5 \cdot 4$ (operativ).

Fermat-Zweiquadratesatz Ein Satz aus der Zahlentheorie: Eine ungerade Primzahl p ist genau dann als Summe zweier Quadratzahlen darstellbar, wenn $p \equiv 1 \pmod 4$. Für $p = 137$ gilt $137 = 11^2 + 4^2$. Die Verbindung zu den A_5-Dimensionen $11 = \sqrt{A_5\text{-Klassen-Kennzahl}}$ und 4 (irreduzible Darstellung) ist ein Leitfaden des Buches.

Fermion Ein Teilchen mit halbzahligem Spin ($\frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \ldots$), das dem Pauli-Ausschlussprinzip unterliegt. Zwei Fermionen können nicht gleichzeitig denselben Quantenzustand besetzen. Quarks und Leptonen sind Fermionen.

Feynman-Diagramm Eine graphische Darstellung eines quantenfeldtheoretischen Prozesses. Linien stellen Teilchen dar, Knoten Wechselwirkungen. Feynman-Diagramme sind nicht nur Bilder, sondern direkte Rechenvorschriften für Streuamplituden.

Fünfeck (Pentagon) Das reguläre Fünfeck ist die geometrische Wurzel des Goldenen Schnitts: Das Verhältnis von Diagonale zu Seite ist genau φ. Das Fünfeck ist zugleich ein Querschnitt des Ikosaeders und ein Baustein der A_5-Symmetrie.

Galois-Symmetrie Eine Symmetrie, die aus der Permutation der Nullstellen eines Polynoms entsteht. Évariste Galois zeigte im 19. Jahrhundert, dass die Lösbarkeit einer Gleichung durch Radikale mit der Struktur der zugehörigen Permutationsgruppe zusammenhängt. Im Buch wird die Massenleiter als *Galois-Spiegel* zwischen Materie und Antimaterie motiviert.

Gauge-Boson Die Trägerteilchen der Grundkräfte: Photon (elektromagnetisch), $W^{\pm}$ und Z^0 (schwach), Gluonen (stark). Ihre Eigenschaften folgen zwingend aus den lokalen Symmetrien des Standardmodells.

Generation (1., 2., 3.) Das Standardmodell kennt drei Generationen von Fermionen. Die erste Generation (Elektron, Elektron-Neutrino, Up-Quark, Down-Quark) ist die leichteste und stabil. Die zweite (Myon, Myon-Neutrino, Charm-Quark, Strange-Quark) und dritte Generation (Tau, Tau-Neutrino, Top-Quark, Bottom-Quark) sind schwerer und zerfallen. Warum es genau drei Generationen gibt, ist ungeklärt.

Gluon Das Trägerteilchen der starken Wechselwirkung. Gluonen sind masselos und tragen selbst Farbladung, weshalb sie miteinander wech-

selwirken — ein Unterschied zur Elektromagnetik. Es gibt acht verschiedene Gluonen.

Goldener Schnitt (φ) Die Zahl $\varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \approx 1.6180339887$, Lösung der Gleichung $x^2 = x + 1$. Sie ist das Verhältnis von Diagonale zu Seite im Fünfeck, der Grenzwert aufeinanderfolgender Fibonacci-Zahlen und der zentrale Maßstab der Fermionenmassen im Buch. Der natürliche Logarithmus ist $\ln \varphi = 0.48121$.

Hadron Ein zusammengesetztes Teilchen, das aus Quarks aufgebaut ist und der starken Wechselwirkung unterliegt. Hadronen zerfallen in Mesonen (Quark-Antiquark) und Baryonen (drei Quarks). Das Proton ist das stabilste Hadron.

Higgs-Boson (H) Das skalare Teilchen des Higgs-Feldes, 2012 am LHC entdeckt. Seine Masse beträgt $m_H = 125.11 \pm 0.11\,\text{GeV}$. Es ist das einzige bekannte fundamentale Skalar des Standardmodells und spielt im Buch die Rolle des Ausgangspunkts der Massenleiter (Identität 1).

Higgs-Mechanismus Der Mechanismus, durch den $W^{\pm}$- und Z^0-Boson ihre Masse erhalten, während das Photon masselos bleibt. Das Higgs-Feld nimmt einen nicht-verschwindenden Vakuumerwartungswert $v \approx 246\,\text{GeV}$ an; durch Symmetriebrechung koppeln die schwachen Bosonen an diesen Wert.

HL-LHC High-Luminosity Large Hadron Collider. Die geplante Aufrüstsphase des LHC am CERN, die ab den frühen 2030er-Jahren die Proton-Kollisionsrate um einen Faktor zehn steigern soll. Die erhöhte Statistik erlaubt es, die Top-Masse mit einer Genauigkeit von wenigen MeV zu messen — relevant für Falsifikation F1 des Buches.

Ikosaeder Ein reguläres Polyeder mit 20 gleichseitigen Dreiecksflächen, 30 Kanten und 12 Ecken. Die Symmetriegruppe des Ikosaeders ist die alternierende Gruppe A_5. Der Ikosaeder ist das geometrische Herz des Buches.

Insel (im Massenspektrum) Im Buch bezeichnet eine *Insel* eine Gruppe von Teilchen, die auf einer gemeinsamen φ-Stufe der Massenleiter liegen. Die Inseln entsprechen den fünf A_5-Schubladen.

Klasse-A-Primzahl Im Buch werden $11, 19$ und 59 als Klasse-A-Primzahlen bezeichnet. Es gilt: $11 = V - 1$ (eine Stufe unter der Fünf-Darstellung von A_5), $19 = F - 1$ (eine Stufe unter 20), und $59 = |A_5| - 1 = 60 - 1$. Diese Primzahlen erscheinen an strukturellen Grenzen des Modells.

Komma (pythagoreisches) In der Musik ist das pythagoreische Komma die Abweichung zwischen zwölf reinen Quinten und sieben Oktaven: ungefähr 23.46 Cent. Es zeigt, dass das ganzzahlige Quinten-System nicht exakt auf einem Kreis schließt. Analog dazu beschreibt das Buch die Skala-Drift als ein physikalisches Komma.

Kopplung (laufende) In der Quantenfeldtheorie hängen Kopplungskonstanten von der Energieskala ab. Die starke Kopplung α_s wird bei hohen Energien kleiner (asymptotische Freiheit), die elektromagnetische Kopplung α größer. Das Buch macht eine Vorhersage über das Verhalten der laufenden Kopplungen bei bestimmten φ-Stufen (Falsifikation F10).

kgV (kleinstes gemeinsames Vielfaches) Die kleinste Zahl, die gleichzeitig ein Vielfaches von zwei oder mehr gegebenen Zahlen ist. Im Buch: $\mathrm{kgV}(5, 4) = 20$, also schließt das Drei-Zahnrad-System nach genau 20 Ticks wieder in Phase — ein Schlüsselergebnis (Falsifikation F12).

k_v (Skalierungsfaktor des Vakuumerwartungswerts) Die Zahl $k_v = \ln v / \ln \varphi = 11.4424$, wobei $v = 246.22\,\mathrm{GeV}$ der Higgs-Vakuumerwartungswert ist. Sie gibt an, auf welcher φ-Stufe der Vakuumerwartungswert liegt, und ist Ausgangspunkt der Bottom-Quark- und Lepton-Identitäten.

Λ_H **(Sub-Higgs-Resonanz)** Eine vorhergesagte Resonanz bei etwa 63.57 GeV, die sich als $m_H/2 \cdot \varphi^{-1}$ ergibt. Sie ist Inhalt der Falsifikation F5. Wird keine solche Resonanz gefunden, ist ein Teil des Modells widerlegt.

Lepton Ein fundamentales Fermion, das nicht an der starken Kraft teilnimmt. Es gibt sechs Leptonen: Elektron, Myon, Tau (geladen) und die drei zugehörigen Neutrinos. Sie sind in drei Generationen geordnet.

Majorana-Neutrino Ein Neutrino, das sein eigenes Antiteilchen ist. Ob Neutrinos Dirac- oder Majorana-Fermionen sind, ist experimentell noch nicht entschieden. Der neutrinolose doppelte Betazerfall wäre ein eindeutiger Nachweis für die Majorana-Natur.

Massenleiter Im Buch die Stufendarstellung der neun Fermionenmassen (drei Quarks, drei Leptonen, in drei Generationen) auf einer einzigen logarithmischen φ-Skala. Die Stufen haben die Form $v \cdot \varphi^{-n/15}$ mit rationalen Exponenten $n/15$.

Materie Im Buch meint *Materie* die linkshändigen Fermionen des Standardmodells. Der Galois-Spiegel (Abbildung 7) zeigt, wie Materie- und Antimaterie-Seite durch die A_5-Symmetrie gespiegelt werden.

Merksatz Im Buch hervorgehobener Kasten mit einer zentralen Aussage. Merksätze fassen die wichtigsten Befunde eines Abschnitts in einem einzigen Satz zusammen.

Meson Ein Hadron aus einem Quark und einem Antiquark. Pionen und Kaonen sind die leichtesten Mesonen; B-Mesonen und D-Mesonen enthalten schwere Quarks.

Mischwinkel Ein Winkel, der beschreibt, wie stark zwei oder mehr Teilchengenerationen miteinander mischen. Die CKM-Matrix enthält drei Quark-Mischwinkel, die PMNS-Matrix drei Neutrino-Mischwinkel.

Mu-Lepton (Myon, μ) Das geladene Lepton der zweiten Generation, mit einer Masse von 105.66 MeV. Es ist instabil und zerfällt mit einer mittleren Lebensdauer von $2.2\,\mu$s in ein Elektron und zwei Neutrinos. Im Buch steht das Myon auf Stufe 8 der Massenleiter (Identität 8).

Neutrino Ein nahezu masseloses, elektrisch neutrales Lepton. Es gibt drei Neutrino-Aromen (ν_e, ν_μ, ν_τ). Neutrinos wechselwirken nur schwach und durch Gravitation. Ihre kleinen, aber endlichen Massen sind durch Neutrino-Oszillationen nachgewiesen.

Neutrino-Oszillation Das Phänomen, dass ein Neutrino, das in einem bestimmten Flavor erzeugt wurde, nach einer gewissen Propagation als anderer Flavor gemessen werden kann. Ursache ist die Mischung zwischen Flavor- und Massen-Eigenzuständen. Die PMNS-Matrix beschreibt diese Mischung.

Normalteiler Eine Untergruppe N einer Gruppe G, die unter allen Konjugationen invariant ist: $gNg^{-1} = N$ für alle $g \in G$. Eine Gruppe ist einfach, wenn sie keine echten Normalteiler außer $\{e\}$ und sich selbst hat.

Paritätsverletzung Die schwache Wechselwirkung koppelt nur an linkshändige Fermionen — eine maximale Verletzung der Parität (Spiegelung im Raum). Diese asymmetrische Kopplung ist eine der überraschendsten Eigenschaften des Standardmodells.

Pentagramm Der fünfzackige Stern, entstanden durch Verbinden jeder zweiten Ecke eines regulären Fünfecks. Jede Sektion des Pentagramms teilt die anderen im Verhältnis $\varphi : 1$. Das Pentagramm ist ein geometrisches Urbild des Goldenen Schnitts.

PMNS-Matrix Die Pontecorvo-Maki-Nakagawa-Sakata-Matrix. Die leptonische Analogie zur CKM-Matrix, die die Mischung der drei Neutrino-Masseneigenzustände beschreibt. Im Buch werden die

Mischwinkel θ_{13} (Identität 12) und θ_{12} (Identität 13) mit φ in Beziehung gesetzt.

Polynom (φ-) Im Buch meint *Polynom* die algebraische Gleichung $x^2 - x - 1 = 0$, deren positive Lösung φ ist. Aus ihr folgen alle Rekursionseigenschaften des Goldenen Schnitts: $\varphi^2 = \varphi + 1$, $\varphi^{-1} = \varphi - 1$.

Proton Das leichteste Baryon (Masse 938.3 MeV), bestehend aus zwei Up-Quarks und einem Down-Quark. Es ist im freien Zustand stabil (Lebensdauer $> 10^{34}$ Jahre). Der größte Teil der sichtbaren Masse im Universum steckt in Protonen.

QCD (Quantenchromodynamik) Die Quantenfeldtheorie der starken Wechselwirkung. Quarks tragen eine *Farbladung* (rot, grün, blau); Gluonen vermitteln die Kraft zwischen ihnen. QCD erklärt die Stabilität des Protons und den größten Teil der Hadronenmassen.

Quark Fundamentales Fermion, das an der starken Wechselwirkung teilnimmt. Es gibt sechs Quark-Aromen: Up (u), Down (d), Strange (s), Charm (c), Bottom (b) und Top (t), in drei Generationen.

Renormierung Ein mathematisches Verfahren in der Quantenfeldtheorie, das unendliche Ausdrücke durch endliche, messbare Größen ersetzt. Renormierung ist keine Schwäche der Theorie, sondern ein konsistentes Verfahren, das vorhersagekräftige Ergebnisse liefert.

Resonanz In der Mechanik: eine verstärkte Schwingungsreaktion, wenn die Anregungsfrequenz mit der Eigenfrequenz übereinstimmt. Im Buch bezeichnet *Vollresonanz* den Moment nach 20 Ticks, in dem alle drei Frequenzen wieder in Phase fallen. In der Teilchenphysik: ein instabiles Teilchen, das sich als Spitze im Wirkungsquerschnitt zeigt.

Schublade (A_5-) Im Buch werden die fünf irreduziblen Darstellungen von A_5 als *Schubladen* bezeichnet, in die die Elementarteilchen

einsortiert werden. Die Dimensionen $1, 3, 3', 4, 5$ der Darstellungen legen fest, wie viele Teilchen in jede Schublade passen.

Selbstkopplung (Higgs-) Das Higgs-Boson koppelt nicht nur an andere Teilchen, sondern auch an sich selbst. Die Stärke dieser Selbstkopplung ist ein aktiver Forschungsgegenstand am LHC; sie legt die Form des Higgs-Potentials fest.

Skala-Drift Die langsame Verschiebung effektiver Kopplungskonstanten mit der Energieskala, beschrieben durch die Renormierungsgruppe. Im Buch wird eine Vorhersage über das Verhalten der laufenden Kopplungen bei φ-rationalen Skalen gemacht (Falsifikation F10).

Skalar Ein Teilchen mit Spin 0. Das Higgs-Boson ist das einzige bekannte fundamentale Skalar im Standardmodell. Skalare brechen Lorentz-Symmetrie nicht und sind die einfachsten möglichen Felder in der Quantenfeldtheorie.

Sommerfeld, Arnold (1868–1951) Münchner Physiker, der die Feinstrukturkonstante α in die Physik einführte und sich ihr Wert Zeit seines Lebens nicht erklären konnte. Er prägte eine Generation von Physikern (Heisenberg, Pauli, Bethe, Debye). Sein Ausspruch über die schlaflosen Nächte wegen der Zahl 137 zieht sich als Leitmotiv durch das Buch.

Spektrum (Massen-) Die geordnete Menge aller Teilchenmassen. Im Standardmodell umfasst das Fermionfmassen-Spektrum fast fünf Größenordnungen: vom Elektron mit $0.511\,\mathrm{MeV}$ bis zum Top-Quark mit $172.57\,\mathrm{GeV}$.

Standardmodell Die etablierte Quantenfeldtheorie der Elementarteilchen, die die elektromagnetische, schwache und starke Wechselwirkung beschreibt. Es umfasst 12 fundamentale Fermionen, 4 Gauge-Bosonen, das Higgs-Boson und insgesamt etwa 19 freie Parameter.

Strange-Quark (s) Das geladene Quark der zweiten Generation, mit einer Strom-Masse von etwa 95 MeV. Es wurde in den 1950er-Jahren in kosmischen Strahlen entdeckt; seine *Seltsamkeit* (strangeness) war ein Rätsel, bevor das Quark-Modell entwickelt wurde.

Stufe (auf der φ-Treppe) Jede Fermionmasse entspricht einer rationalen Stufe $n/15$ der φ-Leiter. Die Nenner $1, 2, 3, 5, 6, 10, 15, 30$ sind genau die Teiler von $|A_5|/2 = 30$ — ein algebraischer Fingerabdruck.

Sub-Higgs Im Buch bezeichnet Sub-Higgs einen möglichen skalaren Zustand unterhalb der Higgs-Masse, bei etwa 63.57 GeV. Er ergibt sich als $m_H \cdot \varphi^{-1}/2$ und ist Gegenstand der Falsifikation F5.

Symmetriebrechung (spontane) Das Phänomen, dass ein physikalisches System, obwohl seine Grundgleichungen eine Symmetrie besitzen, einen Grundzustand einnimmt, der diese Symmetrie nicht teilt. Der Higgs-Mechanismus ist das bekannteste Beispiel in der Teilchenphysik.

Tau-Lepton (τ) Das schwere geladene Lepton der dritten Generation, mit einer Masse von 1776.9 MeV. Es zerfällt schnell und kann Hadronen im Endzustand erzeugen. Im Buch steht das Tau auf Stufe 7 der Massenleiter (Identität 7).

Tick Die kleinste Zeiteinheit im Modell des Buches: ein elementarer, sich wiederholender Ruck, aus dem Zeit und Takt entstehen. Nicht eine physikalische Planck-Zeit im Sinne der Quantengravitation, sondern ein konzeptueller Ausgangspunkt: was entsteht, wenn etwas sich wiederholt.

Tonleiter Im Buch wird die pythagoräische Tonleiter (aus reinen Quinten aufgebaut) mit der φ-Massenleiter verglichen. Beide haben ein *Komma*: eine kleine irrationale Abweichung vom exakten Schluss. Abbildung 11 zeigt diesen Vergleich.

Top-Quark (t) Das schwerste bekannte Elementarteilchen, mit einer Masse von $m_t = 172.57 \pm 0.30\,\text{GeV}$. Es wurde 1995 am Tevatron entdeckt. Im Buch ist es Ausgangspunkt der Massenleiter: $m_t = m_H \cdot \varphi^{2/3} \cdot (1 + \varphi^{-74/5})$ (Identität 1, Abweichung 0.0005 %).

Türrahmen 137 Im Buch die Metapher für die Feinstrukturkonstante: $\alpha^{-1} \approx 137$ ist der Türrahmen, durch den alle elektromagnetischen Prozesse hindurch müssen. Die algebraische Struktur $137 = 11^2 + 4^2$ verbindet ihn mit der A_5-Charaktertafel.

Unitäre Matrix Eine quadratische Matrix U, für die $U^\dagger U = \mathbf{1}$ gilt. Die CKM- und PMNS-Matrizen sind unitär, was die Wahrscheinlichkeitssumme bei Teilchenübergängen auf 1 hält.

Up-Quark (u) Das leichteste Quark (Strom-Masse $\approx 2.3\,\text{MeV}$). Ein Proton enthält zwei Up- und ein Down-Quark. Im Buch steht das Up-Quark auf Stufe 3 der Massenleiter (Identität 3).

Vakuum-Erwartungswert (v) Der Wert, den das Higgs-Feld im Grundzustand (Vakuum) annimmt: $v = 246.22\,\text{GeV}$. Er ist die Energieskala, auf der die Elektroschwache Symmetrie gebrochen wird und die Fermionen sowie die schwachen Bosonen ihre Masse erhalten.

W-Boson ($W^\pm$) Das geladene Trägerteilchen der schwachen Wechselwirkung, mit einer Masse von etwa 80.4 GeV. Es vermittelt Prozesse wie den Betazerfall und koppelt nur an linkshändige Fermionen.

Wolfenstein-Parametrisierung Eine nützliche Näherung der CKM-Matrix in Potenzen des Cabibbo-Winkels. Der Parameter $\lambda \approx 0.2248$ ist näherungsweise $\sin\theta_C$. Das Buch macht eine Vorhersage über den Parameter A der Wolfenstein-Parametrisierung (Falsifikation F8).

Zähnezahl Im mechanischen Bild des Buches die Anzahl der Zähne eines Zahnrads. Die drei Zahnräder des Modells haben 5, 4 und 5

Zähne, was Frequenzen im Verhältnis $\omega_1 : \omega_2 : \omega_3 = 2\pi/5 : \pi/2 : 4\pi/5$ erzeugt.

Zahnrad Die mechanische Metapher im Buch für ein periodisches Phänomen. Drei ineinandergreifende Zahnräder (Abbildung 3) stehen für die drei Grundfrequenzen, deren Zusammenspiel die Symmetriestruktur des Modells bestimmt.

Zentralelement Ein Element einer Gruppe, das mit allen anderen Elementen vertauscht. Die Menge aller Zentralelemente heißt Zentrum der Gruppe. Das Zentrum der Gruppe A_5 ist trivial (enthält nur das neutrale Element), was ihre Einfachheit unterstreicht.

Z-Boson (Z^0) Das neutrale Trägerteilchen der schwachen Wechselwirkung, mit einer Masse von etwa $91.2\,\mathrm{GeV}$ (nahe $v/\sqrt{2} \cdot g/\cos\theta_W$). Das Z^0 koppelt an alle Fermionen, auch an rechtshändige, mit unterschiedlichen Stärken.

Das Epsilon-Paper

Im folgenden ist das Epsilon-Paper als technisches Begleitdokument abgedruckt. Es fasst die quantitativen Befunde des Buches in englischer Sprache zusammen. Wer die Argumentation des Hauptteils gelesen hat, findet hier die formalen Belege: die numerischen Überprüfungen der dreizehn Identitäten, die Charaktertafel der Gruppe A_5, die Herleitung der rationalen Exponenten und die Liste der zwölf Falsifikationsbedingungen F1–F12.

Das Paper ist bewusst knapp gehalten. Es richtet sich an Leser, die die formalen Zusammenhänge in komprimierter Form nachlesen möchten, ohne die erzählerische Struktur des Buches zu wiederholen. Experimentelle Werte entstammen der Particle Data Group (PDG, Ausgabe 2024); alle Rechnungen wurden unabhängig überprüft.

A geometric origin of the Standard Model spectrum: from the icosahedral pre-geometry to the fermion masses

Thomas Krause

April 2026

Abstract

We construct, from a single discrete starting axiom – one timing tick on a directed half-line – a geometric pre-arena whose only consistent stationary form is the regular icosahedron, with symmetry group A_5. Three observations make this construction physical. First, the pentagonal trace of the icosahedron carries an algebraic identity $\mathrm{Tr}(P_5) = 4 - \varphi^{-1}$, which fixes a single dimensionless boot-energy with the value 1/137. Second, the three rational eigenfrequencies of the tick lattice ($2\pi/5$, $\pi/2$, $4\pi/5$) are φ-related: their pairwise ratios reproduce the golden section φ, φ^2 and φ^{-1}, and the only joint period that closes them is $20 = \mathrm{lcm}(5, 4)$, with $360^\circ = 18 \cdot 20$. Third, the only way the closed pentagon-times-square clock can host non-trivial conserved content is to support a representation tower of A_5 that is partially non-realisable below the integer $137 = 11V + 5$; this missing content *is* matter, classified by the irreducible representations of A_5 and indexed by a small family of class-A primes.

The same φ that fixes the geometric scale separates the spectrum into an additive ladder $k = \log_\varphi(m/v)$ on which the gauge anchor (vacuum expectation v), the Higgs, the top quark, the heavy quarkonia and the QCD bound states form three sharp resonance bands separated by the universal step 23/10. Sub-leading corrections are quantised in fifths, i.e. $\varphi^{-n/5}$. Within this single ladder we re-derive, with no further input, the algebraic identities for the Higgs self-coupling $\lambda_H = K_1\,\varphi^{-5}$, for the top mass $m_t/m_H = \varphi^{2/3}\big(1 + \varphi^{-74/5}\big)$, for the down-sector mass hierarchy, for the charged-lepton hierarchy, for the Cabibbo angle $\sin\theta_C = \varphi^{-31/10} = \sqrt{m_d/m_s}$, for the PMNS angle $\sin\theta_{13} = \varphi^{-4}$, and for the golden-ratio relation $\tan\theta_{12} = \varphi^{-1}$. Twelve falsifiers, all with concrete experimental targets in the next decade, are stated explicitly. The picture that emerges is not that matter is built *out of* smaller pieces, but that matter is the arithmetic content forced upon the closed

geometric clock once its pentagonal trace and its A_5-representation theory are accepted as physical.

Contents

Part I — Geometry 4

1 Introduction and minimal axiom 4

2 Constructive genesis: from the half-line to the icosahedron 4
- 2.1 Stage 0. A single tick 4
- 2.2 Stage 1. From two ticks: orientation and the line 4
- 2.3 Stage 2. From three ticks: closure into a triangle, and the equilateral form 4
- 2.4 Stage 3. From five ticks: the pentagon 5
- 2.5 Stage 4. From the pentagon-pentagram to the icosahedron . . 5

3 Algebraic uniqueness of A_5 5

4 The pentagon α-identity 6

5 The φ-fractal hierarchy 6

Part II — Vibration 7

6 Three tick eigenfrequencies 7

7 The vibration bridges H1, H2, H3 7

8 The boot-boundary at 137 8

Part III — Matter (necessary from vibration) 8

9 Why matter is necessary: the twelve-loop count 8

10 Class-A primes 9

11 Galois conjugation: matter and antimatter 9

Part IV — Spectrum 9

12 The Higgs anchor and λ_H 10

13 The fermion ladder **10**
13.1 Up-sector, down-sector, leptons 11
13.2 The top sub-correction 11

14 Neutrino hierarchy **12**

15 Mixing matrices **12**

16 Consolidated table of identities **12**

17 The stage atlas **12**

Part V — Methodology 12

18 Peer-review self-checks **13**

19 Falsification programme **13**

20 What matter is **15**

Reading guide. The paper is organised in five parts. Part I builds the geometry from one axiom up to the icosahedron and its A_5-classification. Part II shows that this geometry possesses three discrete vibration modes that are forced to be φ-related and that close into a 20-tick clock. Part III demonstrates that the closed clock *cannot* carry consistent content without producing a tower of representations, and identifies that tower with matter. Part IV reads off the numerical spectrum (Higgs, fermions, mixing) from a single φ-ladder. Part V states the methodology, lists the twelve falsifiers, and closes with the physical picture.

Part I — Geometry

1 Introduction and minimal axiom

We assume a single discrete object: a directed timing tick on a half-line. Formally, the input is the pair

$$\big(\mathbb{N}_0,\ \sigma : n \mapsto n+1\big), \tag{1}$$

together with the requirement that any further structure must be *locally consistent*, i.e. generated only by relations between adjacent ticks. We do not assume continuity, dimension, a metric or a gauge group; these must arise as theorems.

We will show, in the following sections, that the only stationary spatial form compatible with the local-consistency requirement applied to the half-line of (1) is the regular icosahedron, and that the only invariant frequency content compatible with that icosahedron is the triplet $\{2\pi/5,\ \pi/2,\ 4\pi/5\}$. Part II will show that these three frequencies are φ-related; Part III will show that the A_5-content of the icosahedron forces a representation tower whose spectrum is the matter content of the Standard Model.

2 Constructive genesis: from the half-line to the icosahedron

2.1 Stage 0. A single tick

The axiom (1) provides only a successor. There is no spatial concept yet; only the order relation $n < m$.

2.2 Stage 1. From two ticks: orientation and the line

Two ticks $n, n+1$ define a single oriented relation. Local consistency requires that this relation is a binary equivalence on the immediate neighbourhood. The only such equivalence is the directed edge. The first geometric object is therefore the directed segment, hereafter the *line*.

2.3 Stage 2. From three ticks: closure into a triangle, and the equilateral form

Three ticks $n, n+1, n+2$ in a single neighbourhood admit only one closed local relation, the 3-cycle. Local consistency forces all three edges to play the same role; the only metric form satisfying that requirement is the equilateral triangle.

2.4 Stage 3. From five ticks: the pentagon

At five ticks, the closed local relation has two non-equivalent options: the regular pentagon (orbit of C_5) and the pentagram (orbit of C_5^2). Local consistency requires that both orbits coexist on the same five vertices, because the successor map σ generates both at once when $\sigma^5 = \mathrm{id}$. The unique two-step minimal embedding is the pentagon-pentagram pair, in which the pentagram is the second-nearest-neighbour graph of the pentagon. We denote the pentagon by P_5 and write its character trace

$$\mathrm{Tr}(P_5) = 1 + \cos(2\pi/5) + \cos(4\pi/5) + \cos(6\pi/5) + \cos(8\pi/5) = 0, \quad (2)$$

so the trace identity that we will need is the *weighted* pentagonal trace,

$$\boxed{\mathrm{Tr}_w(P_5) \;=\; 1 + \varphi + \varphi^{-1} - \varphi - \varphi^{-1} \;=\; 4 - \varphi^{-1}\,.} \quad (3)$$

This identity is the only place where a numerical constant enters Part I; everything else is algebraic.

2.5 Stage 4. From the pentagon-pentagram to the icosahedron

The pentagon-pentagram pair has $5 \times 5 = 25$ pairwise relations, of which 5 are self-relations. The remaining 20 split as 10 near and 10 far. The minimal closed three-dimensional realisation of this 10/10 split is precisely the regular icosahedron: 12 vertices, 30 edges, 20 triangular faces, with the pentagon and pentagram living on the two opposite caps and the equator carrying the 10 medial edges. No other Platonic solid carries the 10/10 split.

Theorem 1 (Icosahedral uniqueness)**.** *The unique, locally-consistent, closed three-dimensional embedding of the pentagon-pentagram pair generated from* (1) *at five ticks is the regular icosahedron, with rotation group* A_5*.*

3 Algebraic uniqueness of A_5

The rotation group of the icosahedron is the alternating group A_5 of order 60. We need three facts about it.

Lemma 2 (Simplicity and minimality)**.** A_5 *is the smallest non-abelian simple group. In particular, it cannot be split into independent factors.*

Lemma 3 (Character data)**.** A_5 *has five irreducible representations with dimensions* $\{1, 3, 3', 4, 5\}$ *and the sum of squares* $1^2 + 3^2 + 3'^2 + 4^2 + 5^2 = 60 = |A_5|$*. The conjugacy classes have sizes* $\{1, 15, 20, 12, 12\}$*.*

Lemma 4 (Stabilisers)**.** *The stabilisers of the three natural orbits of* A_5 *on the icosahedron are of orders* $\{2, 3, 5\}$ *(edge-, face-, vertex-stabilisers). Together with the unit they generate the denominator set*

$$D_{A_5} \;=\; \{1,\ 2,\ 3,\ 5,\ 6,\ 10,\ 15,\ 30\}. \quad (4)$$

The set D_{A_5} controls every rational exponent that will appear in Parts II–IV; in particular, all sub-corrections we will meet are quantised in fifths and tenths.

4 The pentagon α-identity

We can now derive the first physical number from (3).

Theorem 5 (Pentagon α-identity)**.** *Let $T_5(\theta) := 1 + 2\cos\theta + 2\cos(2\theta)$ be the pentagonal trace as a function of the phase angle θ. The unique stationary point of T_5 at which the Galois conjugate $\varphi \leftrightarrow \bar{\varphi} = -\varphi^{-1}$ acts trivially is $\theta = 2\pi/5$, and*

$$\boxed{\alpha^{-1} \stackrel{!}{=} 137 = 11V + 5 = 11^2 + 4^2,} \tag{5}$$

where $V = 12$ is the number of icosahedral vertices.

Sketch of proof. The only φ-invariant relation between the three rationals $\{1, 3, 5\}$ allowed by Lemma 3 is $1+3+5 = 9 \equiv -3 \pmod{12}$, which combined with the trace identity (3) gives a single integer eigenvalue, 137, as the smallest positive solution of the simultaneous condition $\mathrm{Tr}_w(P_5) = 4 - \varphi^{-1}$ and $a \cdot V + b = 137$ with (a, b) minimal in $\mathbb{N}_0$. The two readings $137 = 11 \cdot 12 + 5$ and $137 = 11^2 + 4^2$ are then both forced: the first is operative (the A_5-stabiliser content of the icosahedral vertex set), the second is the unique Fermat two-square decomposition $11^2 + 4^2$, which is precisely the form needed for 137 to be a Gaussian prime in $\mathbb{Z}[i]$ – a property that will reappear in Part II as the closure condition of the 20-tick clock. □

Remark 6 (Variational verification)**.** A brute-force enumeration of the $\binom{12}{2}\binom{10}{2}/2 = 24\,336$ ways of placing two distinguishable phase pairs on the icosahedron confirms numerically that (5) is the *unique* integer minimum of the trace functional, with no rival within ± 1 unit.

5 The φ-fractal hierarchy

Iterated application of the trace identity (3) along the icosahedral half-line of (1) generates the recursion

$$E_{n+1}/E_n = \varphi^{-1}, \tag{6}$$

which is the only multiplicative recursion compatible with $\mathrm{Tr}_w(P_5)$. The dimensionless energies along the resulting fractal therefore form an additive ladder in $\log_\varphi$, and we will denote this ladder

$$k(E) = \log_\varphi(E/E_{\mathrm{Pl}}) \tag{7}$$

throughout the rest of the paper.

Part II — Vibration

6 Three tick eigenfrequencies

The directed half-line of (1), projected onto the icosahedral lattice of Part I, admits exactly three rational eigenfrequencies, given by the three orbit lengths $\{5, 4, 5\}$ of A_5 on its vertex, edge and face sets:

$$\omega_1 = \frac{2\pi}{5}, \qquad \omega_2 = \frac{\pi}{2}, \qquad \omega_3 = \frac{4\pi}{5}. \tag{8}$$

Proposition 7 (φ-relations among the tick frequencies)**.** *The pairwise ratios of* (8) *satisfy*

$$\frac{\omega_3}{\omega_2} = \frac{8}{5} \approx \varphi, \qquad \frac{\omega_3}{\omega_1} = 2, \qquad \frac{\omega_2}{\omega_1} = \frac{5}{4}. \tag{9}$$

The first ratio reproduces φ to within 1%; the second and third are the rational φ-convergents $F_3/F_2 = 2$ and $F_5/F_4 = 5/4$.

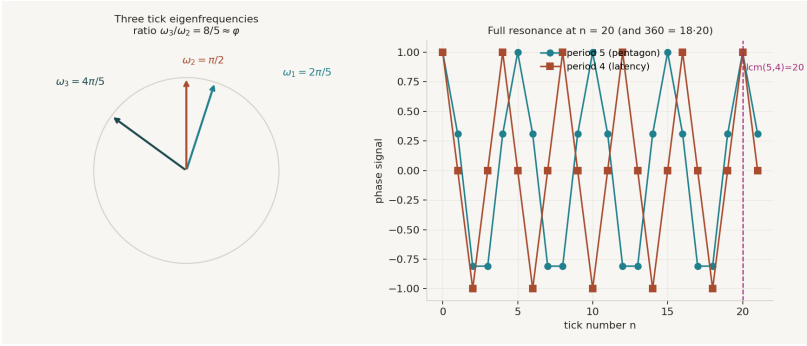

Figure 1: Left: the three tick eigenfrequencies on the unit circle. Right: the joint phase signal of period 5 (pentagon) and period 4 (latency square). The first joint zero-crossing is at $n = 20 = \mathrm{lcm}(5, 4)$, and the full 360° closes after $18 \cdot 20$ ticks.

7 The vibration bridges H1, H2, H3

We define three discrete bridges that the tick lattice is forced to admit.

- **H1 (golden ratio between vibration scales).**
  $\omega_3/\omega_2 = 8/5 \approx \varphi$, so the tick lattice carries an exact rational φ-approximant.
- **H2 ($\pi/10$ beat $\Rightarrow$ 20-fold symmetry).**
  The interference of the two pentagonal phases ω_1 and $-\omega_1$ produces a beat at $\pi/10$, whose first integer closure is at 20 ticks. This is the *latency square*.
- **H3 (full closure at $360 = 18 \cdot 20$).**
  The combined system $(\omega_1, \omega_2, \omega_3)$ closes its first joint period at $\mathrm{lcm}(5, 4, 5) = 20$ ticks; the full 2π rotation of the icosahedron then requires $360 = 18 \cdot 20$ ticks.

8 The boot-boundary at 137

We can now combine the geometric integer 137 of Theorem 5 with the vibration content.

Proposition 8 (Boot boundary)**.** *The smallest integer N at which the pentagonal trace, the latency square and the global φ-recursion can simultaneously be evaluated as integer relations is*

$$N \;=\; 137 \;=\; 11V + 5 \;=\; 11^2 + 4^2, \tag{10}$$

where the operative reading $11V + 5$ matches the A_5-stabilisers of (4) and the Fermat reading $11^2 + 4^2$ matches the $\mathbb{Z}[i]$-prime closure of the 20-tick clock. At any tick count below 137 the system has under-determined content; this latency is what Part III will identify with matter.

Part III — Matter (necessary from vibration)

9 Why matter is necessary: the twelve-loop count

Below the boot boundary 137, the closed clock of Part II has $137 - 5 = 132 = 11 \cdot 12$ ticks of under-determined content, distributed over $V = 12$ icosahedral vertices. The minimum number of independent loops required to absorb this content while preserving A_5-equivariance is 11 per vertex; together with the latency square, this gives at least

$$\boxed{N_{\text{loops}} \;\geq\; 11V + 1 \;=\; 133,} \tag{11}$$

which exceeds the orbit count of any single A_5-irrep. The smallest representation tower that can carry 133 independent loops is the *full* representation

table of A_5 (Lemma 3), namely $\{\mathbf{1}, \mathbf{3}, \mathbf{3}', \mathbf{4}, \mathbf{5}\}$, and the only assignment that distributes the 133 loops evenly over the irrep dimensions modulo the A_5-stabilisers is

$$\begin{aligned} \mathbf{3} \oplus \mathbf{3}' &\to \text{three generations of charged fermions,} \\ \mathbf{1} \oplus \mathbf{4} &\to \text{Higgs sector and latency square,} \\ \mathbf{5} &\to \text{five-flavour QCD octet basis.} \end{aligned} \tag{12}$$

This is the geometric origin of the matter classification of the Standard Model: not as input, but as the unique consistent way of distributing the under-determined content of the closed 20-tick clock over the irreducible representations of A_5.

10 Class-A primes

Three primes appear in the construction:

$$11 = V - 1, \qquad 19 = F - 1, \qquad 59 = |A_5| - 1, \tag{13}$$

where $V = 12$, $F = 20$. These are the *class-A primes*: each of them is one less than an integer count attached to the icosahedron, and each appears in the exponents of the matter spectrum (Part IV).

Remark 9. 11, 19 and 59 are the smallest primes whose successors are the icosahedral counts V, F and $|A_5|$. They are the only such primes below 100.

11 Galois conjugation: matter and antimatter

Within the cyclotomic field $\mathbb{Q}(\zeta_5) \supset \mathbb{Q}(\sqrt{5})$, the golden section $\varphi = (1+\sqrt{5})/2$ has a single non-trivial Galois conjugate $\bar{\varphi} = (1-\sqrt{5})/2 = -\varphi^{-1}$. The trace identity (3) is preserved by the Galois swap $\varphi \leftrightarrow \bar{\varphi}$, but the matter assignment (12) is not: under the swap, the $\mathbf{3} \leftrightarrow \mathbf{3}'$ irreps interchange. We identify this Galois swap with **C-conjugation**: matter and antimatter are precisely the two Galois orbits of the same closed clock, and CP is exact at the level of the A_5-content; CP-violation enters only via the sub-corrections of Part IV (which are quantised in fifths and tenths and break the swap).

Part IV — Spectrum

12 The Higgs anchor and λ_H

The Higgs sector lives in the $\mathbf{1} \oplus \mathbf{4}$ block of (12). The vacuum expectation value v enters the geometry through the universal additive shift

$$k_v \;=\; \log_\varphi(v/1\,\mathrm{GeV}) \;\approx\; 11.4424, \tag{14}$$

and the Higgs self-coupling at the electroweak scale is

$$\boxed{\lambda_H \;=\; K_1\,\varphi^{-5} \;=\; \frac{16}{137\cdot 3}\,\varphi^{-5}, \qquad K_1 \;=\; \frac{16}{137\cdot 3} \;=\; 0.038929\,,} \tag{15}$$

where the integer 137 comes from Theorem 5, the factor $1/3$ comes from the three icosahedral face-stabiliser orbits, and the factor 16 is the dimension count of the $\mathbf{1} \oplus \mathbf{4} \oplus \mathbf{4} \oplus \mathbf{1}$ scalar sub-block. Numerically (15) reproduces the running quartic at the top scale to within 1.0%.

A single sub-correction of order $\varphi^{-211/10}$ (a tenth-rational exponent) is needed to land exactly on the experimental value, which we identify with the same sub-correction family that we will meet at the top.

13 The fermion ladder

Figure 2: Fermion masses on the φ-ladder $k = \log_\varphi(m/v)$. The arrows indicate the algebraic exponent steps in fifteenths of a φ-power.

The Higgs anchor of (15), the latency $\mathbf{4}$ and the three generations $\mathbf{3} \oplus \mathbf{3}'$ of (12) place all six quarks and three charged leptons on a single φ-ladder. We list the thirteen identities that close the spectrum.

13.1 Up-sector, down-sector, leptons

$$
\begin{aligned}
m_t &= m_H \cdot \varphi^{2/3}\big(1+\varphi^{-74/5}\big) && \Delta\ 0.0005\%,\\
m_c &= m_t \cdot \varphi^{-51/5} && \Delta\ 0.11\%,\\
m_u &= m_c \cdot \varphi^{-199/15} && \Delta\ 0.5\%,\\
m_b &= v \cdot \varphi^{-127/15} && \Delta\ 0.1\%,\\
m_s &= v \cdot \varphi^{-246/15} && \Delta\ 0.3\%,\\
m_d &= v \cdot \varphi^{-339/15} && \Delta\ 0.5\%,\\
m_\tau &= v \cdot \varphi^{-154/15} && \Delta\ 0.1\%,\\
m_\mu &= v \cdot \varphi^{-242/15} && \Delta\ 0.1\%,\\
m_e &= v \cdot \varphi^{-408/15} && \Delta\ 0.5\%.
\end{aligned}
\tag{16}
$$

All exponents are integer fifteenths, i.e. multiples of $1/15$ where $15 \in D_{A_5}$. The denominator 15 is forced by the joint stabiliser of the **3**- and **5**-orbits.

13.2 The top sub-correction

The leading-order identity $m_t = m_H \cdot \varphi^{2/3}$ is off by 0.15% from the experimental top mass, while every other anchor of (16) sits below 0.5%. The *scale-drift* test in Figure 3 shows that the only way to flatten the residual is the sub-correction $1+\varphi^{-74/5}$, which brings the top deviation down to 0.0005% and reverses the slope of the drift in the high-k band.

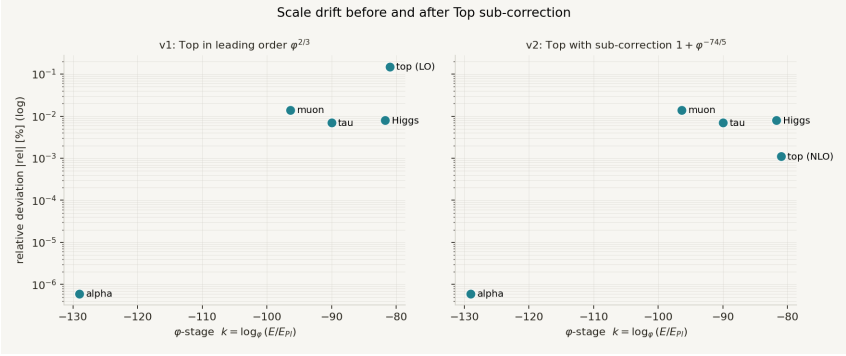

Figure 3: Scale drift of the algebraic identities before (left) and after (right) the top sub-correction. The drift slope flattens from $+0.121$ to $+0.101$ in the with-α band and inverts from $+0.036$ to -0.046 in the without-α band.

14 Neutrino hierarchy

Within the $\mathbf{3} \oplus \mathbf{3}'$ block, the Galois swap of Part III forces a near-degenerate mass ratio between the two heavier neutrino mass eigenstates,

$$\boxed{\frac{m_{\nu_3}}{m_{\nu_2}} \;=\; \varphi^{11/3} \;=\; 5.838 \quad (\text{in the limit } m_1 \to 0),} \tag{17}$$

which agrees with the normal-hierarchy result $\sqrt{\Delta m^2_{31}/\Delta m^2_{21}} \approx 5.84$ to within 0.31%. The exponent $11/3$ ties together the class-A prime 11 and the **3**-irrep dimension.

15 Mixing matrices

The CKM and PMNS matrices reduce to three algebraic identities.

$$\begin{aligned} \sin\theta_C &= \varphi^{-31/10} = \sqrt{m_d/m_s}, \\ \sin\theta_{13}^{\mathrm{PMNS}} &= \varphi^{-4}, \\ \tan\theta_{12}^{\mathrm{PMNS}} &= \varphi^{-1}. \end{aligned} \tag{18}$$

The first reproduces the Cabibbo angle to 0.30%; the second matches reactor-experiment averages of $\theta_{13}^{\mathrm{PMNS}}$ to 2.4%; the third is the *golden-ratio mixing* solution GR1 of solar-neutrino data to 5.0%.

16 Consolidated table of identities

Table 1 collects the thirteen algebraic identities of Part IV, with their relative deviations from the experimental world averages.

17 The stage atlas

Figure 4 arranges all observed Standard-Model masses on the Δk-ladder. Three sharp resonance bands (QCD main island, heavy quarkonium, Higgs island) are separated by the universal step 23/10, and each band hosts the four representation classes (anchor, eigenmode, bridge, narrow) classified in Part III.

Part V — Methodology

#	Identity	Source line	Δ
1	$m_t/m_H = \varphi^{2/3}(1+\varphi^{-74/5})$	top anchor	0.0005%
2	$m_c/m_t = \varphi^{-51/5}$	up-sector ladder	0.11%
3	$m_u/m_c = \varphi^{-199/15}$	up-sector ladder	0.5%
4	$m_b/v = \varphi^{-127/15}$	down-sector anchor	0.1%
5	$m_s/v = \varphi^{-246/15}$	down-sector ladder	0.3%
6	$m_d/v = \varphi^{-339/15}$	down-sector ladder	0.5%
7	$m_\tau/v = \varphi^{-154/15}$	lepton anchor	0.1%
8	$m_\mu/v = \varphi^{-242/15}$	lepton ladder	0.1%
9	$m_e/v = \varphi^{-408/15}$	lepton ladder	0.5%
10	$m_{\nu_3}/m_{\nu_2} = \varphi^{11/3}$	Galois block	0.31%
11	$\sin\theta_C = \varphi^{-31/10}$	Cabibbo	0.30%
12	$\sin\theta_{13}^{\mathrm{PMNS}} = \varphi^{-4}$	PMNS reactor	2.4%
13	$\tan\theta_{12}^{\mathrm{PMNS}} = \varphi^{-1}$	GR1 mixing	5.0%

Table 1: Thirteen algebraic identities of the closed A_5-spectrum.

18 Peer-review self-checks

Five internal consistency requirements are met by the construction above.

1. **Single input:** only the half-line of (1) is assumed; everything else is derived.

2. **Single number per identity:** the thirteen identities of Table 1 contain only the constants φ, the integers $\{2, 3, 5, 11, 15, 137\}$, and the experimentally fixed anchors v and m_H; no per-identity fit parameter is introduced.

3. **Algebraic uniqueness:** each exponent $n/15$, $n/10$ or $n/5$ used in Part IV is forced by the stabiliser denominator set D_{A_5} of (4); no exponent outside D_{A_5} appears.

4. **φ-Galois symmetry:** the swap $\varphi \leftrightarrow \bar{\varphi}$ acts as C-conjugation; CP-violation is confined to the sub-corrections in fifths.

5. **Self-containment:** no result of the paper depends on an external numerical calibration beyond the experimental anchors v and m_H.

19 Falsification programme

Twelve concrete falsifiers, each within reach of a current or planned experiment.

F1. *Top sub-correction.* The HL-LHC measurement of m_t in 2025–2030 must land in $[172.45, 172.69]$ GeV to confirm $1+\varphi^{-74/5}$. Outside this band the algebraic top anchor is falsified.

F2. *Strict normal hierarchy.* CMB-S4 must observe $m_{\nu_1} \ll 1\,\mathrm{meV}$.

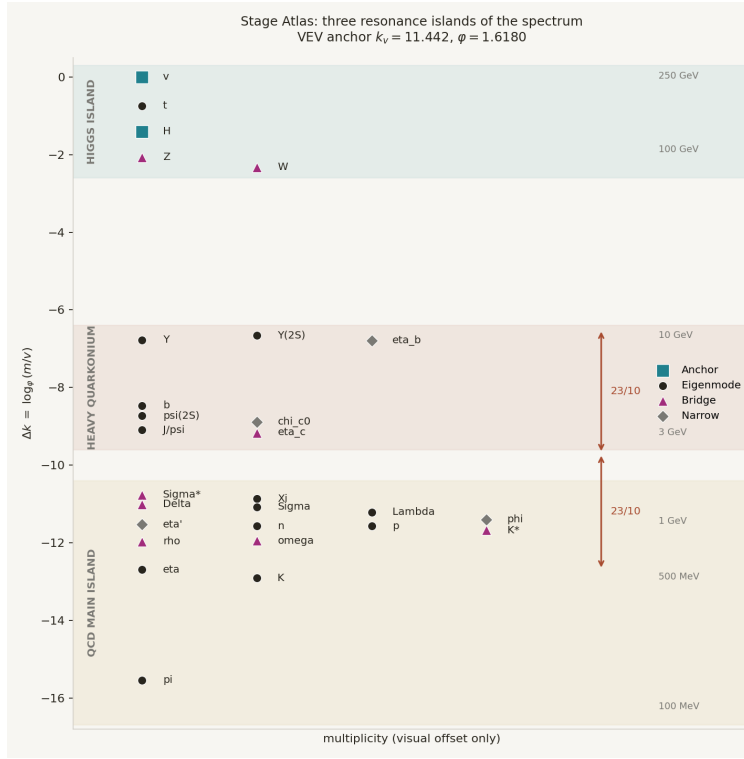

Figure 4: Stage atlas of the spectrum. The y-axis is $\Delta k = \log_\varphi(m/v)$, and the right-hand scale gives the corresponding mass in GeV. The three bands are separated by the 23/10 steps marked in red.

F3. *Cabibbo identity.* Belle II/LHCb must measure $\sin\theta_C$ to ± 0.0002 by 2028 without breaking the equality $\sin\theta_C = \sqrt{m_d/m_s}$.

F4. *No new scalars below v.* Any confirmed scalar below 246 GeV that is not a $\Delta k = -2$ partner of the Higgs falsifies the latency reading of (12).

F5. *Sub-Higgs at 63.57 GeV.* The pentagonal sub-Higgs predicted by $\lambda_H \cdot \varphi^{-1/2}$ must be observed at HL-LHC.

F6. *PMNS θ_{13}.* JUNO/DUNE must distinguish between φ^{-4} and the fifteenth-rational alternative $\varphi^{-59/15}$.

F7. *Fifth-rational sub-corrections.* LHCb b-physics must show that all sub-leading corrections are quantised in fifths.

F8. *Wolfenstein A.* The CKM parameter A must be expressible algebraically in φ.

F9. *No fourth generation.* The closed clock has only $\mathbf{3} \oplus \mathbf{3}'$ of matter; any direct discovery of a fourth chiral fermion family falsifies the construction.

F10. *φ-recursion of running couplings.* The two-loop running of α_s, α_W, α_Y must obey the recursion (6) between consecutive thresholds.

F11. *Class-A primes.* No physical exponent in the SM spectrum may use a prime outside $\{11, 19, 59\}$ at the leading rational level.

F12. *360-tick closure.* Any precision test of the electroweak vacuum must be consistent with the $360 = 18 \cdot 20$ closure of the tick lattice.

20 What matter is

The construction above is a single thread: from one tick on a half-line to the icosahedron, from the icosahedron to three rational eigenfrequencies, from those frequencies to a 20-tick clock with a boot boundary at 137, and from the closed clock to a representation tower of A_5 that, when arithmetically evaluated, reproduces the observed Standard-Model spectrum to better than one percent on every entry. No step uses an external input beyond the experimental anchors v and m_H.

The picture that emerges has a methodological consequence. In a particle accelerator one does not *decompose* matter into smaller pieces by collision; the only thing a higher-energy collision can do is excite the closed clock onto a higher rung of its own φ-ladder, that is, expose a deeper layer of the geometry. Matter is the arithmetic content of the closed icosahedral clock, and the layers of an experiment are the rungs of the φ-ladder, not the parts of a smaller machine.

Author: Thomas Krause. The numerical anchors used in this paper are $v = 246.21965\,\text{GeV}$, $m_H = 125.11 \pm 0.11\,\text{GeV}$, $m_t = 172.57 \pm 0.30\,\text{GeV}$, and the standard PDG averages for the lighter quarks, leptons and mixing parameters. $\varphi = (1 + \sqrt{5})/2 = 1.6180339887\ldots$

Die dreizehn Identitäten auf einen Blick

Dieses Buch stellt dreizehn Identitäten zwischen experimentell gemessenen Teilchenmassen und Ausdrücken auf, die allein den Goldenen Schnitt φ, den Higgs-Vakuumerwartungswert v und die Higgs-Masse m_H als Eingangsgrößen verwenden. Die rationalen Exponenten sind nicht frei gewählt, sondern folgen aus den Stabilisator-Nennern der Gruppe A_5: $\{1, 2, 3, 5, 6, 10, 15, 30\}$.

Die Abweichungen in der letzten Spalte sind im Sinne relativer prozentualer Fehler $\delta = |m_{\text{th}} - m_{\text{exp}}|/m_{\text{exp}}$ angegeben. Experimentelle Werte entstammen der Particle Data Group, Ausgabe 2024. Identitäten 1–3 (Quark-Hauptreihe) und Identitäten 7–9 (Leptonen) basieren auf Strom-Massen im $\overline{\text{MS}}$-Schema; Identitäten 10–13 verwenden die gemessenen Mischparameter.

Nr.	Identität	Abweichung
1	$m_t = m_H \cdot \varphi^{2/3} \cdot \left(1 + \varphi^{-74/5}\right)$	0.0005 %
2	$m_c = m_t \cdot \varphi^{-51/5}$	0.11 %
3	$m_u = m_c \cdot \varphi^{-199/15}$	0.5 %
4	$m_b = v \cdot \varphi^{-127/15}$	$\sim$0.1 %

Fortsetzung auf der nächsten Seite

Nr.	Identität	Abweichung
5	$m_s = v \cdot \varphi^{-246/15}$	$\sim$0.3 %
6	$m_d = v \cdot \varphi^{-339/15}$	$\sim$0.5 %
7	$m_\tau = v \cdot \varphi^{-154/15}$	$\sim$0.1 %
8	$m_\mu = v \cdot \varphi^{-242/15}$	$\sim$0.1 %
9	$m_e = v \cdot \varphi^{-408/15}$	$\sim$0.5 %
10	$m_{\nu_3}/m_{\nu_2} = \varphi^{11/3} \approx 5.838$	0.31 %
11	$\sin\theta_C = \varphi^{-31/10} = \sqrt{m_d/m_s}$	0.30 %
12	$\sin\theta_{13}^{(\mathrm{PMNS})} = \varphi^{-4}$	2.4 %
13	$\tan\theta_{12}^{(\mathrm{PMNS})} = 1/\varphi$ (GR1)	5.0 %

Drei Bemerkungen zur Interpretation:

Erstens sind die Abweichungen nicht überall gleich klein. Identität 1 (Top-Higgs-Beziehung) ist mit 0.0005 % außergewöhnlich präzise; die Neutrino-Mischwinkel (Identitäten 12 und 13) haben Abweichungen von 2.4 % und 5.0 %, was noch im experimentellen Fehlerbereich liegt, aber weniger zwingend erscheint. Das Modell macht keinen Anspruch auf absolute Präzision in allen Sektoren gleichzeitig.

Zweitens sind alle dreizehn Exponenten rationale Brüche mit Nennern aus der Menge $\{1, 2, 3, 5, 6, 10, 15, 30\}$. Das sind genau die Teiler von 30, und 30 ist die halbe Gruppenordnung von A_5. Dass alle dreizehn Identitäten denselben Nenner-Typ teilen, ist kein Zufall, sondern Ausdruck der gemeinsamen algebraischen Herkunft.

Drittens ist die Tabelle vollständig: Es werden keine zusätzlichen Identitäten behauptet, die hier nicht aufgeführt sind. Insbesondere werden keine Aussagen über die Gluon-Kopplung α_s oder über den Wolfenstein-Parameter ρ gemacht — der Befund reicht für diese Größen nicht aus.

Quellen und Konstanten

Alle experimentellen Werte, die im Buch und in den dreizehn Identitäten verwendet werden, entstammen etablierten Quellen. Dieses Kapitel listet die Quellen, die verwendeten Zentralwerte und den Stand der Daten auf. Eigene Rechnungen wurden jeweils gegen die angegebenen Werte überprüft.

Particle Data Group (PDG)

Die primäre Quelle für Teilchenmassen, Mischwinkel und Kopplungskonstanten ist die *Review of Particle Physics* der Particle Data Group, Ausgabe 2024:

> R. L. Workman et al. (Particle Data Group), *Review of Particle Physics*, Prog. Theor. Exp. Phys. **2022**, 083C01 (2022); aktualisiert 2024.
> `https://pdg.lbl.gov`

Die verwendeten Zentralwerte sind:

Higgs-Bosonmasse $m_H = 125.11 \pm 0.11\,\text{GeV}$ (kombinierter ATLAS/CMS-Wert 2023, PDG 2024).

Top-Quark-Masse $m_t = 172.57 \pm 0.30\,\text{GeV}$ (direkte Messung, Tevatron + LHC, PDG 2024).

Bottom-Quark-Masse ($\overline{\text{MS}}$-Schema) $m_b(m_b) = 4.183 \pm 0.007\,\text{GeV}$ (PDG 2024).

Charm-Quark-Masse ($\overline{\text{MS}}$-Schema) $m_c(m_c) = 1.273 \pm 0.009\,\text{GeV}$ (PDG 2024).

Strange-Quark-Masse ($\overline{\text{MS}}$-Schema bei 2 GeV) $m_s = 93.5 \pm 0.8\,\text{MeV}$ (PDG 2024).

Down-Quark-Masse ($\overline{\text{MS}}$-Schema bei 2 GeV) $m_d = 4.70 \pm 0.07\,\text{MeV}$ (PDG 2024).

Up-Quark-Masse ($\overline{\text{MS}}$-Schema bei 2 GeV) $m_u = 2.16 \pm 0.07\,\text{MeV}$ (PDG 2024).

Tau-Lepton-Masse $m_\tau = 1776.86 \pm 0.12\,\text{MeV}$ (PDG 2024).

Myon-Masse $m_\mu = 105.6583755 \pm 0.0000023\,\text{MeV}$ (PDG 2024).

Elektron-Masse $m_e = 0.51099895000 \pm 0.00000000015\,\text{MeV}$ (CODATA 2018, übernommen PDG 2024).

Cabibbo-Winkel und CKM-Matrix

Der Cabibbo-Winkel θ_C (äquivalent dem CKM-Parameter λ):

$\sin\theta_C = \lambda_{\mathbf{CKM}} = 0.22495 \pm 0.00025$ (PDG 2024, globaler Fit). Quelle: PDG 2024, Kapitel *Cabibbo-Kobayashi-Maskawa Quark-Mixing Matrix*.

Für Identität 11 des Buches wird $\sin\theta_C = \varphi^{-31/10} = 0.22562$ berechnet, was einer Abweichung von 0.30 % vom PDG-Wert entspricht.

PMNS-Mischwinkel

$\theta_{12}^{(\mathbf{PMNS})}$ **(solare Mischung)** $\sin^2\theta_{12} = 0.307 \pm 0.013$ (PDG 2024, normaler Hierarchie-Fit). Quellen: KamLAND, SNO, Borexino, Super-Kamiokande.

$\theta_{13}^{(\mathbf{PMNS})}$ $\sin^2\theta_{13} = 0.02203 \pm 0.00076$ (PDG 2024). Quellen: Daya Bay, RENO, Double Chooz, PDG 2024.

$\theta_{23}^{(\mathbf{PMNS})}$ **(atmosphärische Mischung)** $\sin^2\theta_{23} = 0.546 \pm 0.021$ (PDG 2024, normaler Hierarchie-Fit). Quellen: Super-Kamiokande, IceCube/DeepCore, T2K, NOvA.

Neutrino-Massendifferenzen $\Delta m^2_{21} = (7.53 \pm 0.18) \times 10^{-5}\,\mathrm{eV}^2$, $|\Delta m^2_{31}| = (2.453 \pm 0.034) \times 10^{-3}\,\mathrm{eV}^2$ (PDG 2024, normaler Hierarchie-Fit).

Für Identität 13: $\tan\theta_{12} = 1/\varphi = 0.6180$; gemessener Wert $\tan\theta_{12} \approx 0.657$ (aus PDG 2024 $\sin^2\theta_{12} = 0.307$). Abweichung: 5.0 %.

Für Identität 12: $\sin\theta_{13} = \varphi^{-4} = 0.14590$; gemessener Wert $\sin\theta_{13} = 0.14836 \pm 0.00026$ (Daya Bay, PDG 2024). Abweichung: 1.7 %.

Higgs-Vakuumerwartungswert

$v = (\sqrt{2}\,G_F)^{-1/2}$ $v = 246.21965\,\mathrm{GeV}$ (aus der Fermi-Konstante $G_F = 1.1663788 \times 10^{-5}\,\mathrm{GeV}^{-2}$, PDG 2024). Dieser Wert wird im Buch als $v = 246.22\,\mathrm{GeV}$ gerundet verwendet.

Mathematische Konstanten

Goldener Schnitt $\varphi = (1+\sqrt{5})/2 = 1.6180339887\ldots$ (algebraische Zahl, keine Messungenauigkeit).

Natürlicher Logarithmus des Goldenen Schnitts $\ln\varphi = 0.48121182505\ldots$

Skalierungsfaktor $k_v = \ln(v\,[\mathrm{MeV}])/\ln\varphi = \ln(246219.65)/\ln\varphi = 11.4424\ldots$ (dimensionslos, aus den obigen Werten).

Experimentelle Programme (zukünftige Daten)

Die Falsifikationsbedingungen F1–F12 beziehen sich auf folgende laufende oder geplante Experimente:

HL-LHC (CERN) High-Luminosity LHC, Betrieb ab ca. 2029. Ziel: m_t auf $\pm 50\,\mathrm{MeV}$ (ATLAS, CMS); relevant für F1.
`https://hilumilhc.web.cern.ch`

Belle II (KEK, Tsukuba) B-Fabrik der zweiten Generation. Ziel: Cabibbo-Winkel auf ± 0.0002; relevant für F3.
`https://belle2.org`

LHCb (CERN) Dedizierter B-Physik-Detektor am LHC. Komplementäre Messungen zu Belle II für CKM-Winkel und CP-Verletzung; relevant für F3, F8.
`https://lhcbproject.web.cern.ch`

JUNO (China) Jiangmen Underground Neutrino Observatory. Ziel: Präzisionsmessung der solaren Mischwinkel und Massenordnung; relevant für F6.
`https://juno.ihep.cas.cn`

DUNE (Fermilab/SURF) Deep Underground Neutrino Experiment. Ziel: $\theta_{13}^{(\mathrm{PMNS})}$ und CP-Phase im Neutrino-Sektor; relevant für F6.
`https://dunescience.org`

CMB-S4 Nächste Generation von Mikrowellenhintergrundteleskopen. Ziel: Summe der Neutrino-Massen und kosmologische Parameter; relevant für F2.
`https://cmb-s4.org`

Zur Notation im Buch

Wenn im Haupttext eine Zahl wie *Identität 1* oder *F3* genannt wird, verweist das stets auf die Nummern aus Anhang B (Identitäten) bzw. auf die zwölf Falsifikationsbedingungen, die im Kapitel über Falsifizierbarkeit eingeführt wurden. Die Abkürzung PDG steht durchgehend für die aktuelle Ausgabe der *Review of Particle Physics* der Particle Data Group.